TD6 - Couples de variables aléatoires

1 Applications directes

Exercice 1 ⋆

La loi conjointe d'un couple (X, Y) est donnée par le tableau :

$X \backslash Y$	0	1/2	1
0	1/6	1/12	1/3
1	1/4	0	1/6

1. Déterminer les lois marginales.
2. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant que $(X = 1)$. Quelle loi usuelle reconnaît-on ?

Exercice 2 ⋆

La loi conjointe d'un couple (X, Y) est donnée par le tableau :

$X \backslash Y$	0	1	2
0	1/36	1/9	1/9
1	1/12	1/3	1/3

1. Déterminer les lois marginales.
2. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant que $(X = 1)$. Pouvait-on prévoir cela ? Reconnaître une loi usuelle.
4. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant que $(Y = 0)$. Quelle loi usuelle reconnaît-on ?
5. Déterminer la loi de $X+Y$. Donner son espérance.
6. Déterminer l'espérance de XY.

Exercice 3 ⋆

La loi conjointe du couple (X, Y) est donnée par le tableau suivant.
Déterminer les lois marginales.
Calculer $E(X),\ E(Y),\ E(XY)$.
Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

$X \backslash Y$	0	1	2
0	1/20	1/4	0
1	17/60	1/4	1/6

Exercice 4 ⋆

1. Soit X une v.a.r. suivant la loi uniforme sur $X(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$. Soit $Y = X^2$.
   Déterminer la loi du couple (X, Y). En déduire la loi de Y.
2. Mêmes questions avec $X(\Omega) = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

Exercice 5 ⋆

Soit $a > 0$ et soient X et Y deux variables aléatoires $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ à support dans $\mathbb{N}$ telles que la loi conjointe du couple (X, Y) soit donnée par :
$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2,\ P([X = i] \cap [Y = j]) = \lambda \frac{a^{i+j}}{i!j!}$.

1. Déterminer la valeur de λ.
2. Donner les lois marginales du couple (X, Y).
3. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 6 - $P(X_1 = X_2)$ ⋆⋆

1. On dispose d'une urne contenant n boules, indiscernables au toucher, et numérotées de 1 à n, avec $n \geq 2$. On extrait une boule, on la remet dans l'urne, et on en extrait une deuxième. On note X_1 le numéro de la première boule extraite et X_2 le numéro de la deuxième.
   (a) Déterminer la loi du couple (X_1, X_2).
   (b) En déduire la probabilité de l'événement $(X_1 = X_2)$.
2. On dispose d'une urne contenant n boules, indiscernables au toucher, et numérotées de 1 à n, avec $n \geq 2$. On extrait une boule, on ne la remet pas dans l'urne, et on en extrait une deuxième. On note Y_1 le numéro de la première boule extraite et Y_2 le numéro de la deuxième.
   (a) Déterminer la loi du couple (Y_1, Y_2).
   (b) En déduire la probabilité de l'événement $(Y_1 = Y_2)$.

Exercice 7 ⋆

On considère n boîtes numérotées de 1 à n. La boîte numéro k contient k boules numérotées de 1 à k. On choisit au hasard une boîte, puis une boule dans cette boîte. Soient X et Y les numéros de la boîte et de la boule obtenues.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y).
2. Calculer $P(X = Y)$.
3. Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance.

Exercice 8 - d'après EML 2018 ⋆⋆

On considère deux var indépendantes X et Y définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, suivant toutes les deux la loi de Poisson de paramètre λ.
Montrer que $P\big((X = Y)\big) = e^{-2\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(k!)^2}$.

Exercice 9 ⋆⋆

On range au hasard trois objets dans un meuble vide contenant trois tiroirs et on note X le nombre d'objets contenus dans le premier tiroir et Y le nombre de tiroirs vides.

1. Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y).
2. Déterminer les lois marginales. Reconnaître la loi de X et expliquer pourquoi on aurait pu prévoir ce résultat.
3. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $(Y = 1)$. La connaître.
4. Dire si les var X et Y sont indépendantes ou non.

Exercice 10 ⋆⋆

On considère deux variables aléatoires indépendantes X et Y définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, suivant respectivement la loi de Poisson de paramètre λ et la loi de Bernoulli de paramètre p.

1. Déterminer $E(XY)$.
2. Déterminer $E(X^2Y)$.

2 Approfondissements

Exercice 11 ⋆⋆

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi $\mathcal{P}(\lambda)$. On pose $Z = \min(X, Y)$ et $T = \max(X, Y)$. Les variables Z et T sont-elles indépendantes ?

Exercice 12 ⋆⋆

Soit X une variable aléatoire telle que pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $P(X = i) = \dfrac{i}{2^{i+1}}$. On dispose de X boules numérotées de 1 à X dans une urne. On effectue un tirage, et on note Y le numéro de la boule tirée.

1. Vérifier que la loi de X est bien une loi de probabilité. Calculer $E(X)$. On donne $V(X) = 2$.
2. Donner la loi conjointe de X et de Y.
3. Déterminer la loi de Y puis son espérance.

Exercice 13 ⋆⋆

Une boite contient 3 boules blanches et 2 boules noires. On y effectue indéfiniment des tirages avec remise de 2 boules prises simultanément. On définit les évènements :

- A_n : « on obtient deux boules de couleurs différentes au n^{e} tirage »,
- B_n : « on obtient deux boules blanches au n^{e} tirage ».

1. Calculer $P(A_n)$ et $P(B_n)$.
2. On note X le numéro du tirage au cours duquel on obtient pour la première fois deux boules de couleurs différentes, et Y le numéro du tirage au cours duquel on obtient pour la première fois deux boules blanches.
   (a) Déterminer les lois de X, Y et leurs espérances.
   (b) Déterminer la loi du couple (X, Y).
   (c) En déduire $P(X < Y)$.

Exercice 14 ⋆⋆

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$, $p \in]0, 1[$.

1. Pour $k \in \mathbb{N}^\star$, calculer $P(Y \geq k)$.
2. Déterminer la loi de $U = \min(X, Y)$. Montrer que U suit une loi géométrique dont on déterminera le paramètre.
3. Déterminer la loi de $V = \max(X, Y)$.

Exercice 15 ⋆⋆⋆

Soient X et $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ indépendantes, $p \in]0, 1[$. Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose $M(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & Y(\omega) \\ Y(\omega) & X(\omega) \end{pmatrix}$. Déterminer la probabilité que $M(\omega)$ soit inversible.

Exercice 16 ⋆⋆

Soient $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 0, 3 \rrbracket)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{3}{4}\right)$ indépendantes. Montrer que X^Y admet une espérance et la calculer.

Exercice 17 ⋆⋆

Soit $p \in]0,1[$ et soit (X,Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la loi conjointe est donnée par, pour tout $(n,k) \in \mathbb{N}^2$:

$$P([X=n] \cap [Y=k]) = \begin{cases} \lambda(1-p)^k & \text{si } k \geq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

1. Déterminer la valeur de λ.
2. Déterminer les lois marginales du couple (X,Y). Quelle est la loi de $X+1$? En déduire $E(X)$ et $V(X)$.
3. Montrer que X et $Y-X$ suivent la même loi.
4. Montrer que X et $Y-X$ sont indépendantes. En déduire $\text{Cov}(X,Y)$. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 18 ⋆⋆

Soit $p \in]0,1[$ et $n \geq 2$. On considère n joueurs de basket-ball qui tirent chacun deux lancers francs. On considère qu'à chaque lancer, un joueur a une probabilité p de marquer et que les deux lancers sont indépendants.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de joueurs ayant marqué leur premier lancer franc et Z la variable aléatoire égale au nombre de joueurs ayant marqué au moins un lancer franc.

1. Déterminer la loi de X.
2. Montrer que Z suit une loi binomiale. Donner son espérance et sa variance.
3. On pose $Y = Z - X$. Que représente Y ? Déterminer sa loi.
4. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ? Calculer $\text{Cov}(X,Y)$.

Exercice 19 ⋆⋆⋆

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.

1. Déterminer la loi de $X+Y$ et $V(X+Y)$.
2. Déterminer la loi de X sachant $[X+Y=n]$.

Exercice 20 ⋆⋆⋆

On suppose que le nombre de personnes qui se présentent à l'entrée d'un cinéma en une heure est une variable aléatoire X qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Le cinéma comporte $N \geq 3$ caisses et on suppose que chaque personne choisit au hasard sa caisse parmi les N. Pour $i \in [\![1,N]\!]$, on note X_i le nombre de personnes ayant choisi la caisse numéro i.

1. Déterminer la loi de X_i conditionnellement à l'événement $[X=n]$ puis la loi de X_i.
2. Déterminer, sans nouveaux calculs, la loi de $X_1 + X_2$.
3. En déduire la covariance de X_1 et X_2.
4. Déterminer $\rho(X_1, X)$.
5. Les variables X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

Exercice 21 ⋆⋆⋆

Soient X et Y deux variables aléatoires sur le même espace probabilisé, suivant des lois de bernoulli de paramètres respectifs p_1 et p_2.

1. Montrer que $|\text{Cov}(X,Y)| \leq \frac{1}{4}$.
2. Montrer que X et Y sont indépendantes si et seulement si $\text{Cov}(X,Y) = 0$.

Exercice 22 ⋆⋆⋆⋆

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On considère une urne contenant 1 boule numérotée 1, 2 boules numérotés 2, et ainsi de suite jusqu'à n boules numérotées n. On tire deux boules, sans remise, dans cette urne et on note X_1 le numéro de la première boule et X_2 celui de la seconde.

1. Déterminer la loi de X_1 et calculer son espérance.
2. Déterminer la loi conjointe du couple (X_1, X_2) et en déduire la loi de X_2.
3. X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?
4. Calculer $\rho(X_1, X_2)$.

3 Exercices de concours

Exercice 23 - d'après EDHEC 2005 ⋆⋆

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Deux joueurs A et B disposent d'une pièce équilibrée. Chacun des joueurs lance la pièce n fois. On désigne par X, Y, Z, et T les variables aléatoires suivantes : X représente le nombde de "face" obtenus par A, Y le nombre de "face" obtenus par B, $Z = X+Y$ et $T = X-Y$.

1. Déterminer la loi suivie par la var Z.
2. Exprimer la probabilité de l'événement $(T=0)$ en fonction de $\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}\binom{n}{n-j}$
3. Z et T sont-elles indépendantes ? (On pourra considérer les événements $(Z=1)$ et $(T=0)$.)

Exercice 24 - d'après oral HEC ⋆⋆

On considère deux var indépendantes X et Y définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, suivant toutes les deux une loi géométrique de paramètre p. Déterminer la loi de $X+Y$ puis la loi de $X-Y$.

Exercice 25 - QSP ESCP 2014 ⋆⋆⋆⋆

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes, admettant une espérance $M \neq 0$ et une variance $V \neq 0$.

1. Calculer l'espérance et la variance de XY en fonction de M et V.
2. Les variables $X+Y$ et XY sont-elles indépendantes ?