Correction DM1 - Appli*

Exercice 1 - ECRICOME ECE 2022 (Exercice 1 adapté)

Partie I

1. On a :
   - $F \subset \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$;
   - La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est bien de la forme $\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ avec $a = b = 0$. Donc $0_{\mathrm{M}_3(\mathbb{R})} \in F$.
   - Soient $M, M' \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Notons :

     $$M = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M' = \begin{pmatrix} a' & b' & b' \\ b' & a' & b' \\ b' & b' & a' \end{pmatrix}.$$

     On a donc :

     $$M+\lambda M' = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} a' & b' & b' \\ b' & a' & b' \\ b' & b' & a' \end{pmatrix} = \big((a+\lambda a') \quad (b+\lambda b') \quad (b+\lambda b')(b+\lambda b') \quad (a+\lambda a') \quad (b+\lambda b')(b+$$

     Donc $M + \lambda M' \in F$.

   Donc $\boxed{F \text{ est bien un sous-espace vectoriel de } \mathrm{M}_3(\mathbb{R}).}$

2. $\boxed{G \text{ n'est pas un sous-espace vectoriel de } \mathrm{M}_3(\mathbb{R}).}$ En effet, bien que $I_3 \in G$ (puisque $I_3^2 = I_3$), on a :

   $$(2I_3)^2 = 4I_3 \neq 2I_3.$$

   Donc $2I_3 \notin G$ et donc $\boxed{G \text{ n'est pas stable par combinaison linéaire.}}$

3. (a) A est de la forme $\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ avec $a = \frac{2}{3}$ et $b = -\frac{1}{3}$. Donc $\boxed{A \in F.}$

   De plus :

   $$\begin{aligned} A^2 &= \left(\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\right)^2 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = A. \end{aligned}$$

   Donc $\boxed{A \in G.}$

   D'où finalement $\boxed{A \in F \cap G.}$

   (b) Comme $A \in G$, A vérifie l'équation $M^2 = M$ que l'on peut écrire $M^2 - M = 0$. Dit autrement, $\boxed{x^2 - x \text{ est un polynôme annulateur de } A.}$

   (c) On a :

   $$\boxed{A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.}$$

   Donc $\boxed{A \text{ n'est pas inversible.}}$

(d) On a :

- $E_1(A) \subset \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ par définition.
- $0_{\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \in E_1(A)$ puisque :

$$A0_{\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0_{\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})}.$$

- Soient $X, X' \in E_1(A)$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$A(X + \lambda X') = AX + \lambda AX' = X + \lambda X'.$$

Donc $X + \lambda X' \in E_1(A)$ et $E_1(A)$ est stable par combinaison linéaire.

Donc $\boxed{E_1(A) \text{ est bien un sous-espace vectoriel de } \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R}).}$

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. On a :

$$\begin{aligned}
X \in E_1(A) &\Leftrightarrow AX = X \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2x - y - z \\ -x + 2y - z \\ -x - y + 2z \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - z &= 3x \\ -x + 2y - z &= 3y \\ -x - y + 2z &= 3z \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} -x - y - z &= 0 \\ -x - y - z &= 0 \\ -x - y - z &= 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow x + y + z = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x - y \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow X \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right).
\end{aligned}$$

Or $\boxed{\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)}$ est une famille de deux vecteurs non colinéaires donc elle est libre. Comme elle engendre $E_1(A)$, $\boxed{\text{c'est une base de } E_1(A).}$

D'où :

$$\boxed{\dim E_1(A) = 2.}$$

Partie II

4. (a) Avec les notations de l'énoncé, on a :

$$\begin{aligned} M \in G &\Leftrightarrow M^2 = M \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a^2+2b^2 & b^2+2ab & b^2+2ab \\ b^2+2ab & a^2+2b^2 & b^2+2ab \\ b^2+2ab & b^2+2ab & a^2+2b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a^2+2b^2 & = & a \\ b^2+2ab & = & b \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a^2+2b^2 & = & a \\ b^2+2ab-b & = & 0 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a^2+2b^2 & = & a \\ b(b+2a-1) & = & 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

ce qui est bien l'équivalence recherchée.

(b) D'après la question précédente, on a :

$$M \in F \cap G \Leftrightarrow \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, \left\{ \begin{array}{rcl} M & = & \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \\ a^2+2b^2 & = & a \\ b(b+2a-1) & = & 0 \end{array} \right. .$$

On a :

$$b(b+2a-1) = 0 \Leftrightarrow (b = 0 \text{ ou } b+2a-1 = 0).$$

Sous hypothèse de $b = 0$, on a $a^2+2b^2 = a \Leftrightarrow a^2 = a \Leftrightarrow a \in \{0,1\}$. Donc :

$$\begin{aligned} & M \in F \cap G \\ \Leftrightarrow \quad & \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, \left\{ \begin{array}{rcl} M & = & \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \\ a & = & 0 \\ b & = & 0 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{rcl} M & = & \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \\ a & = & 1 \\ b & = & 0 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{rcl} M & = & \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \\ a^2+2b^2 & = & a \\ b+2a-1 & = & 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Les deux premiers cas donnent 0_3 et I_3 respectivement. Travaillons sur le dernier cas. On a :

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{rcl} a^2+2b^2 & = & a \\ b+2a-1 & = & 0 \end{array} \right. &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a^2+2b^2 & = & a \\ b & = & 1-2a \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a^2+2(1-2a)^2 & = & a \\ b & = & 1-2a \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 9a^2-9a+2 & = & 0 \\ b & = & 1-2a \end{array} \right. \end{aligned}$$

Le discriminant de l'équation quadratique est :

$$\Delta = (-9)^2 - 4 \times 9 \times 2 = 81 - 72 = 9 > 0.$$

Donc l'équation a deux solutions :

$$a_1 = \frac{9-3}{2 \times 9} = \frac{1}{3} \text{ et } a_2 = \frac{9+3}{2 \times 9} = \frac{2}{3}.$$

On trouve donc :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a^2+2b^2 & = & a \\ b+2a-1 & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & \frac{1}{3} \\ b & = & 1 - 2 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & \frac{2}{3} \\ b & = & 1 - 2 \times \frac{2}{3} = -\frac{1}{3} \end{array} \right. .$$

En mettant tout bout à bout, on arrive à :

$$M \in F \cap G \Leftrightarrow M = 0_3 \text{ ou } M = I_3 \text{ ou } M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{ ou } M = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Et après calcul, on constate bien que cela correspond à :

$$\boxed{M \in F \cap G \Leftrightarrow M \in \{0_3, I_3, I_3 - A, A\}.}$$

5. (A, B) est une famille de deux vecteurs de F non colinéaires. Elle est donc libre. Comme $\dim F = 2$, par considération sur les dimensions, $\boxed{(A, B) \text{ est une base de } F.}$

6. (a) **Erreur d'énoncé !** Le sujet d'origine avait déjà l'erreur, vous avez donc eu l'expérience concours Ecricome 2022.

   On cherche donc $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $M = \alpha A + \beta B$. Ce couple existe nécessairement et est même unique puisque (A, B) est une base de F. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$\begin{aligned}
M = \alpha A + \beta B \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} = \alpha \times \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} + \beta \times \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 3a & 3b & 3b \\ 3b & 3a & 3b \\ 3b & 3b & 3a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha + \beta & \beta - \alpha & \beta - \alpha \\ \beta - \alpha & 2\alpha + \beta & \beta - \alpha \\ \beta - \alpha & \beta - \alpha & 2\alpha + \beta \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3a = 2\alpha + \beta \\ 3b = \beta - \alpha \end{cases} \\
& \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\Leftrightarrow} \quad \begin{cases} 3a - 3b = 3\alpha \\ 3b = \beta - \alpha \end{cases} \\
& \underset{L_1 \leftarrow 1/3 L_1}{\Leftrightarrow} \quad \begin{cases} a - b = \alpha \\ 3b = \beta - \alpha \end{cases} \\
& \underset{L_2 \leftarrow L_1 + L_2}{\Leftrightarrow} \quad \boxed{\begin{cases} a - b = \alpha \\ a + 2b = \beta \end{cases}}
\end{aligned}$$

   (b) On trouve rapidement que :

$$\boxed{AB = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

   Et de même :

$$\boxed{BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

   (c) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

   - **Initialisation :** On a d'une part $M^0 = I_3$ et d'autre part :

$$\alpha^0 A + \beta^0 B = A + B = A + (I_3 - A) = I_3.$$

     Donc on a bien :

$$\boxed{M^0 = \alpha^0 A + \beta^0 B.}$$

   - **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $M^n = \alpha^n A + \beta^n B$.

     On a alors :

$$\begin{aligned}
M^{n+1} &= M^n \times M = (\alpha^n A + \beta^n B)(\alpha A + \beta B) \\
&= \alpha^n \alpha \underbrace{A^2}_{=A \text{ car } A \in G} + \alpha^n \beta \underbrace{AB}_{=0} + \beta^n \alpha \underbrace{BA}_{=0} + \beta^n \beta \underbrace{B^2}_{=B \text{ car } B \in G} \\
&= \boxed{\alpha^{n+1} A + \beta^{n+1} B.}
\end{aligned}$$

On a donc bien $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ M^n = \alpha^n A + \beta^n B.}$

7. (a) Si $\alpha = 0$, alors M est proportionnelle à B qui est non inversible. Donc M est non inversible.
Si $\beta = 0$, de manière similaire, M est proportionnelle à A et donc non inversible.
Si ni α, ni β ne vaut zéro, on vérifie alors que :

$$\begin{array}{rcl}(\alpha^{-1}A + \beta^{-1}B)M & = & (\alpha^{-1}A + \beta^{-1}B)(\alpha A + \beta B) \\ & = & A^2 + \alpha^{-1}\beta AB + \beta^{-1}\alpha BA + B^2 \\ & = & A + B = I_3.\end{array}$$

Donc M est inversible.
Ainsi $\boxed{M \text{ est bien inversible si et seulement si } \alpha \neq 0 \text{ et } \beta \neq 0.}$

(b) Avec la méthode de la question précédente, on a :

$$M^{-1} = \alpha^{-1}A + \beta^{-1}B.$$

Donc $M^{-1} \in F$. Donc :

$$(M^{-1})^n = (\alpha^{-1})^n A + (\beta^{-1})^n B.$$

On a donc bien pour tout entier naturel n :

$$\boxed{M^{-n} = \alpha^{-n}A + \beta^{-n}B}$$

dès lors que M est inversible.

Partie III

8. On a :

$$\boxed{I_3 - T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = -A - 4B}$$

en utilisant la formule pour α et β trouvée précédemment.

9. Comme $I_3 - T \in F$, et que les coefficients trouvés sont non nuls, on a :

$$\begin{array}{rcl}(I_3 - T)^{-1} & = & (-1)^{-1}A + (-4)^{-1}B = -A - \frac{1}{4}B = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \times \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ & = & \frac{1}{12}\begin{pmatrix} -9 & 3 & 3 \\ 3 & -9 & 3 \\ 3 & 3 & -9 \end{pmatrix} \boxed{= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.}\end{array}$$

10. Soit $L \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$L = TL + Y \Leftrightarrow L - TL = Y \Leftrightarrow (I_3 - T)L = Y \Leftrightarrow L = (I_3 - T)^{-1}Y.$$

Donc $\boxed{\text{la matrice colonne existe bien et est unique.}}$

11. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\boxed{X_{n+1} - L = TX_n + Y - L = TX_n + Y - (TL + Y) = T(X_n - L).}$$

On a ensuite par récurrence immédiate :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ X_n - L = T^n(X_0 - L).}$$

12. On en déduit que pou tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$X_n = L + T^n(X_0 - L).$$

On trouve rapidement que $T = 2A + 5B$ avec les formules pour α et β. Or $T^n = (2A + 5B)^n = 2^n A + 5^n B$ d'après la partie précédente. D'où :

$$\boxed{X_n = L + (2^n A + 5^n B)(X_0 - L).}$$

Exercice 2 - ECRICOME ECE 2022 (extrait de l'exercice 2)

Partie I - Étude de la fonction g

1. On a $\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$ et $\ln(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\infty$. Donc :

$$\lim_{x\to 0^+} \left(2 - \frac{1}{x}\right)\ln(x) = +\infty.$$

Par composition avec exp, on obtient ainsi :

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} g(x) = +\infty.}$$

De même, on a :

$$\lim_{x\to +\infty} \left(2 - \frac{1}{x}\right)\ln(x) = +\infty.$$

D'où :

$$\boxed{\lim_{x\to +\infty} g(x) = +\infty.}$$

2. (a) h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ par opérations sur les fonctions usuelles. De plus, on a pour tout $x > 0$:

$$h'(x) = \frac{1}{x} + 2 > 0.$$

Donc $\boxed{h \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^\star.}$

(b) h est continue (car dérivable) sur $\mathbb{R}_+^\star$ et strictement monotone sur le même intervalle. De plus :

$$\lim_{x\to 0^+} h(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to +\infty} h(x) = +\infty.$$

Donc, d'après le théorème de la bijection, h est une bijection de $\mathbb{R}_+^\star$ sur $\mathbb{R}$.

En particulier, $\boxed{0 \text{ a un unique antécédent par } h \text{ que l'on peut noter } \alpha.}$

On a $h\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) + 2 \times \frac{1}{2} - 1 = -\ln(2) < 0$ et $h(1) = \ln(1) + 2 \times 1 - 1 = 1 > 0$. En appliquant h^{-1} (qui est de même monotonie que h, donc strictement croissante) à $h\left(\frac{1}{2}\right) < 0 < h(1)$, on obtient :

$$\boxed{\frac{1}{2} < \alpha < 1.}$$

(c) g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ (par opérations usuelles) et pour tout $x > 0$, on a :

$$\boxed{g'(x) = \left[\frac{1}{x^2}\ln(x) + \left(2 - \frac{1}{x}\right)\frac{1}{x}\right]\exp\left(\left(2 - \frac{1}{x}\right)\ln(x)\right) = \frac{1}{x^2}(\ln(x) + 2x - 1)g(x) = \frac{1}{x^2}h(x)g(x).}$$

(d) Comme $\frac{g(x)}{x^2}$ est toujours positif, $g'(x)$ est du signe $h(x)$. On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0		α		$+\infty$
$h(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$g(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

3. Pour $x \in \mathbb{R}_+^\star$, on a :

$$\begin{aligned} g(x) - x^2 &= \exp\left(\left(2 - \frac{1}{x}\right)\ln(x)\right) - x^2 \\ &= \exp\left(2\ln(x)\right)\exp\left(-\frac{\ln(x)}{x}\right) - x^2 \\ &= x^2\exp\left(-\frac{\ln(x)}{x}\right) - x^2 \\ &= x^2\left(\exp\left(-\frac{\ln(x)}{x}\right) - 1\right) \end{aligned}$$

Comme $\frac{\ln(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, on peut l'équivalent usuel :

$$\exp(u) - 1 \underset{0}{\sim} u.$$

Donc :

$$\boxed{g(x) - x^2 \underset{x\to+\infty}{\sim} -x^2\frac{\ln x}{x} \underset{x\to+\infty}{\sim} -x\ln(x).}$$

Partie II - Étude d'une suite récurrente

4. On a $g(\mathbb{R}_+^\star) \subset \mathbb{R}_+^\star$ car exp est strictement positive. Donc par récurrence immédiate, $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et est bien défini.

5.

```python
def suite(u0, n):
    L = [u0]
    u = u0
    for i in range(1,n+1):
        u = np.exp((2-1/u)*np.log(u))
        L.append(u)
    return L
```

6. (a) Pour $x \in]0,1[$, on a $x-1<0$ et $\ln(x) < 0$. Donc :

$$(x-1)\ln(x) > 0$$

Pour $x = 1$, on a $(x-1)\ln(x) = 0$.
Pour $x > 1$, on a $x - 1 > 0$ et $\ln(x) > 0$. Donc :

$$(x-1)\ln(x) > 0$$

Donc $\boxed{(x-1)\ln(x) \geqslant 0 \text{ pour tout } x > 0 \text{ avec égalité si et seulement si } x = 1.}$

(b) Pour $x > 0$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{g(x)}{x} &= \frac{\exp\left(\left(2-\frac{1}{x}\right)\ln(x)\right)}{x} = \exp\left(\left(2 - \frac{1}{x}\right)\ln(x)\right)\exp(-\ln(x)) \\ &= \exp\left(\left(1 - \frac{1}{x}\right)\ln(x)\right) = \exp\left(\frac{(x-1)\ln(x)}{x}\right). \end{aligned}$$

D'après la question précédente, $(x-1)\ln(x) \geqslant 0$. Donc l'argument de l'exponentielle est positif et par croissance de l'exponentielle :

$$\boxed{\frac{g(x)}{x} \geqslant \exp(0) = 1.}$$

(c) Comme $x > 0$, on en déduit en multipliant par x que :

$$\boxed{g(x) \geqslant x.}$$

De plus, on a :

$$\begin{aligned} g(x) = x \quad &\Leftrightarrow \quad \exp\left(\frac{(x-1)\ln(x)}{x}\right) = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{(x-1)\ln(x)}{x} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (x-1)\ln(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \boxed{x = 1.} \end{aligned}$$

7. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $g(u_n) \geqslant u_n$ d'après la question précédente et donc $u_{n+1} \geqslant u_n$. Donc $\boxed{(u_n) \text{ est croissante.}}$

8. **Dans cette question uniquement**, on suppose que $u_0 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

(a) On a :

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \exp\left(\left(2 - \frac{1}{\frac{1}{2}}\right)\ln\frac{1}{2}\right) = \exp(0) = 1.$$

Par décroissance de g sur $[1/2, \alpha]$, on a donc :

$$\boxed{g\left(\left[\frac{1}{2}, \alpha\right]\right) \subset [\alpha, 1].}$$

De même, on a :

$$g(1) = \exp\left(\left(2 - \frac{1}{1}\right)\ln 1\right) = \exp(0) = 1.$$

Par décroissance de g sur $[1/2, \alpha]$, on a donc :

$$\boxed{g([\alpha, 1]) \subset [\alpha, 1].}$$

Donc on a :

$$\boxed{g\left(\left[\frac{1}{2}, 1\right]\right) \subset [\alpha, 1] \subset \left[\frac{1}{2}, \alpha\right].}$$

(b) (u_n) est donc croissante et majorée (par 1). Donc $\boxed{(u_n) \text{ converge.}}$ Notons ℓ sa limite. Comme g est continue sur $\mathbb{R}_+^\star$, ℓ est un point fixe de g.
Or l'unique point fixe de g est 1. Donc nécessairement :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 1.}$$

9. **Dans cette question uniquement,** on suppose que $u_0 > 1$.

(a) On a vu que $g(1) = 1$. Donc par stricte croissance de g sur $[\alpha, +\infty[$ (qui contient 1), on a $g(x) > 1$ si $x > 1$.
Par récurrence immédiate, on en déduit que $\boxed{u_n > 1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) (u_n) est croissante. D'après le théorème de la limite monotone, soit elle converge, soit elle tend vers $+\infty$.
Or si (u_n) converge, alors elle tend vers l'unique point fixe de g (qui est 1). Or la limite de (u_n) est forcément supérieur à $u_0 > 1$. Donc (u_n) n'est pas convergente.
Donc :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty.}$$

10. **Dans cette question uniquement,** on suppose que $0 < u_n < \frac{1}{2}$.
On a vu que $g(1/2) = 1$. Donc par stricte décroissance de g sur $]0, \alpha]$, on en déduit que $u_1 = g(u_0) \in]1, +\infty[$.
On est donc ramené au cas précédent avec un indice décalé. Donc :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty}$$

et (u_n) ne converge pas.