DS2 Appli - Algèbre linéaire, séries, probabilités

Samedi 28/09/2024 - 4h

Calculatrice interdite

1. La notation des copies tiendra compte de la qualité de la rédaction.
2. Si vous repérez ce qui vous pensez être une erreur d'énoncé, signalez le sur votre copie et poursuivez votre composition en expliquant vos initiatives.
3. Encadrez ou soulignez vos résultats.
4. **Changer de copie** à chaque nouvel exercice.

Exercice 1 - EM Lyon ECE 2011 (Exercice 2 - extrait adapté)

On considère les matrices carrées de taille 3 suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pour tout réel λ, on note $E_\lambda(A)$ l'ensemble des vecteurs colonnes X de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ solutions de l'équation $AX = \lambda X$.

Partie I - Détermination des puissances de A

1. Sans calcul, justifier que A est non inversible.
2. On note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un vecteur quelconque de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Calculer AX.
3. Justifier que $E_0(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. En déterminer une base et la dimension.
4. Justifier que $E_1(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. En déterminer une base et la dimension.
5. Justifier que $E_4(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. En déterminer une base et la dimension.
6. Former la famille $\mathcal{C}$ en concaténant (c'est-à-dire en rassemblant) tous les vecteurs des bases de $E_0(A)$, $E_1(A)$ et $E_4(A)$ (dans cet ordre). Déterminer la matrice de $\mathcal{C}$ dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
7. Vérifier que P est inversible et calculer son inverse P^{-1}.
8. On note D la matrice définie par $D = P^{-1}AP$. Montrer que D est une matrice diagonale.
9. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
10. En déduire une expression explicite de A^n en fonction de n.

Partie II - Détermination d'une racine carrée de A

On se propose de résoudre l'équation $M^2 = A$, d'inconnue M, matrice carrée d'ordre trois.
Soit M une matrice carrée d'ordre 3. On note $N = P^{-1}MP$.

11. Montrer que $M^2 = A \Leftrightarrow N^2 = D$.
12. Établire que, si $N^2 = D$ alors $ND = DN$.
13. En déduire que, si $N^2 = D$ alors N est diagonale.
14. Déterminer toutes les matrices diagonales N telles que $N^2 = D$. On note Δ la solution dont tous les coefficients sont positifs ou nuls.
15. En déduire une solution de l'équation $M^2 = A$.

Exercice 2 - ECRICOME ECE 2014 (Exercice 2)

On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{x}{\ln(1+x)} & \text{si } x \in]0,+\infty[\end{cases}$$

ainsi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = \mathrm{e} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n).$$

1. Déterminer le signe de f sur l'intervalle $[0,+\infty[$. En déduire que, pour tout entier naturel n, u_n existe.
2. Écrire un programme en `Python` qui, pour une valeur N fournie par l'utilisateur, calcule et affiche u_N.
3. Montrer que f est continue sur $[0,+\infty[$.
4. Établir que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.
5. Donner le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de :
$$\ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$$
puis déterminer un équivalent de $f'(x)$ lorsque x tend vers 0.
6. Prouver que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$.
7. Établir que :
$$\forall x \geqslant \mathrm{e}-1,\ f(x) \leqslant x \quad \text{et} \quad (x+1)\ln(x+1) \geqslant (x+1).$$
En déduire que :
$$\forall x \geqslant \mathrm{e}-1,\ f'(x) \geqslant 0.$$
8. Démontrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{e}-1 \leqslant u_n.$$
9. Établir que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser la valeur de sa limite L.

Exercice 3 - EDHEC ECE 2018 (Exercice 2)

On dispose de trois pièces : une pièce numérotée 0, pour laquelle la probabilité d'obtenir « pile » vaut $\frac{1}{2}$, une pièce numérotée 1, donnant « face » à coup sûr et une troisième pièce numérotée 2, donnant « pile » à coup sûr.
On choisit l'une de ces pièces au hasard et on la lance indéfiniment.
Pour tout i de $\{0,1,2\}$, on note A_i l'événement : « on choisit la pièce numérotée i ».
Pour tout entier naturel k non nul, on note P_k l'événement « on obtient "pile" au lancer numéro k »et on pose $F_k = \overline{P_k}$.
On considère la variable aléatoire X, égale au rang d'apparition du premier "pile" et la variable aléatoire Y, égale au rang d'apparition du premier "face". On convient de donner à X la valeur 0 si l'on obtient jamais "pile" et de donner à Y la valeur 0 si l'on n'obtient jamais "face".

1. (a) Déterminer $P(X=1)$.

   Aide de début d'année : justifier que $P(X=1) = \frac{1}{2}$.

   (b) Montrer que : $\forall n \geqslant 2,\ P(X=n) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

   (c) En déduire la valeur de $P(X=0)$.

   Aide de début d'année : justifier que $P(X=0) = \frac{1}{3}$.
2. Montrer que X admet une espérance et la calculer.
3. Montrer que $X(X-1)$ possède une espérance. En déduire que X possède une variance et vérifier que $V(X) = \frac{4}{3}$.
4. Justifier que Y suit la même loi que X.

5. (a) Montrer que, pour tout entier j supérieur ou égal à 2, $P([X=1]\cap[Y=j])=P(Y=j)$.
   (b) Montrer que, pour tout entier i supérieur ou égal à 2, $P([X=i]\cap[Y=1])=P(X=i)$.
6. **Loi de $X+Y$.**
   (a) Expliquer pourquoi $X+Y$ prend toutes les valeurs entières positives sauf 0 et 2.
   (b) Montrer que $P(X+Y=1)=\frac{2}{3}$.
   (c) Justifier que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on a :
   $$[X+Y=n]=([X=1]\cap[Y=n-1])\cup([Y=1]\cap[X=n-1])\,.$$
   (d) En déduire que l'on a, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3 :
   $$P(X+Y=n)=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$
7. **Informatique.**
   On rappelle que, pour tout entier naturel m, l'instruction `rd.randint(0,m+1)` renvoie un entier aléatoire compris entre 0 et m (ceci de façon équiprobable).
   On décide de coder "pile" par 1 et "face" par 0.
   (a) Compléter le script Python suivant pour qu'il permette le calcul et l'affichage de la valeur prise par la variable aléatoire X lors de l'expérience réalisée dans cet exercice.

```python
piece = rd.randint(..., ...)
x = 1
if piece == 0:
    lancer = rd.randint(..., ...)
    while lancer == 0:
        lancer = ...
        x = ...
else:
    if piece == 1:
        x = ...
print(x)
```

   (b) Justifier que le cas où l'on joue avec la pièce numérotée 2 ne soit pas pris en compte dans le script précédent.

Problème 4 - EDHEC ECE 2020 (Problème)

On convient que, pour tout réel x, on a $x^0=1$.

1. Pour tout n de $\mathbb{N}$, justifier l'existence des intégrales :
$$I_n=\int_0^1\frac{x^n}{(1+x)^2}\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J_n=\int_0^1\frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x.$$
2. Calculer I_0 et I_1.
3. (a) Pour tout n de $\mathbb{N}$, calculer $I_{n+2}+2I_{n+1}+I_n$.
   (b) En déduire I_2.
   (c) Compléter le script Python suivant pour qu'il permette le calcul de I_n (dans la variable `b`) et son affichage pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```python
n = int(input("Donnez une valeur pour n: "))
a = 1/2
b = np.log(2) - 1/2
for k in range(2,n+1):
    aux = a
    a = ...
    b = ...
print(b)
```

4. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$.
   (b) En déduire que la suite (I_n) est convergente et donner sa limite.
5. Établir, à l'aide d'une intégration par parties, que : $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ I_n = nJ_{n-1} - \frac{1}{2}$.
6. (a) Calculer J_0 puis exprimer, pour tout entier naturel n, $J_n + J_{n+1}$ en fonction de n.
   (b) En déduire la valeur de J_1.
7. En utilisant les questions 5 et 6, compléter le script Python suivant afin qu'il permette le calcul et l'affichage de I_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```python
n = int(input("Donner une valeur pour n: "))
J = np.log(2)
for k in range(1,n):
    J = ...
I = ...
print(I)
```

8. Établir que : $\forall n \in \mathbb{N}^\star, J_n = (-1)^n \left(\ln 2 - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right)$.
9. (a) Utiliser les questions 4 et 5 pour déterminer la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n$.
   (b) En déduire la nature de la série de terme général $\frac{(-1)^{k-1}}{k}$ ainsi que la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.
   (c) Utiliser la question 5 pour déterminer un équivalent de J_n du type $\frac{1}{\alpha n}$, avec $\alpha > 0$, lorsque n est au voisinage de $+\infty$.
10. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $u_n = \ln 2 - \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j-1}}{j}$.
    (a) Déduire des questions précédentes un équivalent de u_n lorsque n est au voisinage de $+\infty$.
    (b) Montrer que la série de terme général $\frac{(-1)^n}{2n}$ est convergente. Peut-on en déduire la nature de la série de terme général u_n ?
11. On se propose, malgré l'impasse précédente, de montrer que la série de terme général u_n est convergente. Pour ce faire, on admet le résultat suivant : si une suite (x_n) est telle que les suites (x_{2n}) et (x_{2n+1}) sont convergentes de même limite ℓ, alors la suite (x_n) converge vers ℓ.

    Pour tout entier naturel n non nul, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$.

    (a) Justifier que, pour tout entier naturel k non nul, on a : $u_k = (k+1)u_{k+1} - ku_k + (-1)^k$.
    (b) En déduire l'égalité suivante :
    $$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ S_n = (n+1)u_{n+1} - u_1 - \frac{1}{2}\left(1 - (-1)^n\right).$$
    (c) Montrer alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n+1} = \dfrac{1}{2} - \ln 2$. Conclure.
12. Des trois résultats suivants, expliquer lequel on vient de démontrer.
    (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{k} \frac{(-1)^{j-1}}{j} = \frac{1}{2} - \ln 2$;
    (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} = \frac{1}{2} - \ln 2$;
    (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} = \frac{1}{2} - \ln 2$.