DS 2 Appro - Algèbre linéaire, séries, probabilités

Samedi 28/09/2024 - 4h

Calculatrice interdite

1. La notation des copies tiendra compte de la qualité de la rédaction.
2. Si vous repérez ce qui vous pensez être une erreur d'énoncé, signalez le sur votre copie et poursuivez votre composition en expliquant vos initiatives.
3. Encadrez ou soulignez vos résultats.
4. **Changer de copie** à chaque nouvel exercice.

Dans tout le sujet, on suppose que les bibliothèques **Python** *sont importées comme suit :*

```python
import numpy as np
import numpy.random as rd
import numpy.linalg as al
import matplotlib.pyplot as plt
```

Exercice 1 - EDHEC ECS 2001 (Exercice 1)

On rappelle que l'ensemble $\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des fonctions définies sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$, muni des lois habituelles, possède une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
On note E l'ensemble des fonctions $\varphi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ qui vérifient la relation $(\star)$ suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi''(x) = (1+x^2)\varphi(x).$$

1. Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que si u et v sont deux éléments de E, alors $u'v - uv'$ est une fonction constante.
3. Soit f la fonction définie, pour tout réel x, par : $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$.
   (a) Vérifier que f est un élément de E.
   (b) Soit g la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = f(x)\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(f(t))^2}$.
   Montrer que g est un élément de E.
4. (a) Soit h une solution de $(\star)$. Montrer, en utilisant le résultat de la deuxième question appliqué aux fonctions h et f, que h est combinaison linéaire de f et de g.
   (b) Montrer finalement que (f,g) est une base de E.

Exercice 2 - EDHEC ECS 2011 (Exercice 2)

On considère un entier naturel n supérieur ou égal à 2. On dispose d'une urne contenant $2n$ boules numérotées de 1 à n, chaque numéro apparaissant deux fois. On effectue au hasard une suite de tirages simultanés de deux boules de cette urne selon le protocole suivant :

- À chaque tirage de deux boules, si les deux boules tirées portent le même numéro, on ne remet pas les boules tirées dans l'urne et on dit qu'une paire est constituée.
- Si les deux boules ne portent pas les mêmes numéros, on les remet dans l'urne avant de procéder au tirage suivant.

Pour tout élément i de $[\![1,n]\!]$ et pour tout entier k non nul, on pose $T_i = k$ si k tirages exactement ont été nécessaires pour constituer i paires.
On admet qu'il existe un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$ permettant de modéliser cette expérience et que, pour tout entier i de $[\![1,n]\!]$, T_i est une variable aléatoire définie sur cet espace.

1. (a) Déterminer la loi de T_1 et reconnaître cette loi.
   (b) Donner sans calcul l'espérance de T_1.
2. (a) Compléter la fonction Python suivante pour qu'elle réalise un tirage de 2 boules dans l'urne :

```python
def tirage(n):
    a = rd.randint(2*n)
    b = a
    while ...:
        b = rd.randint(2*n)
    return a,b
```

   Comment sont représentées les boules dans ce code Python ?

   (b) Compléter la fonction Python suivante afin qu'elle renvoie une réalisation de la variable T_1.

```python
def T1(n):
    n1 = 0
    n2 = 1
    t = 0
    while ...:
        a,b = tirage(n)
        n1 = a % n
        n2 = b % n
        t = t + 1
    return t
```

   (c) **Bonus :** le sujet d'origine contenait l'unique question suivante.
   Compléter la fonction Python suivante afin qu'elle renvoie une réalisation de la variable T_1.

```python
def T1(n):
    t = 0
    a = 0
    b = 1
    while ...:
        a = rd.randint(n) + 1
        b = rd.randint(n) + 1
        t = t+1
    return t
```

   Quelle était la réponse attendue ? Expliquer l'erreur du sujet.
3. On pose $X_1 = T_1$ et pour tout i de $[\![2, n]\!]$, $X_i = T_i - T_{i-1}$.
   (a) Que représente la variable X_i ?
   (b) Déterminer, pour tout i de $[\![1, n]\!]$, la loi de X_i, ainsi que son espérance.
   (c) En déduire que T_n admet une espérance et que l'on a $E(T_n) = n^2$.
4. On effectue une suite de n tirages de deux boules selon le protocole précédent et on note S_n la variable aléatoire égale au nombre de paires constituées lors de ces n tirages.
   (a) Calculer $P(S_n = 0)$.
   (b) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} P(S_n = 0)$.
   (c) Montrer que $P(S_n = n) = \frac{n!2^n}{(2n)!}$.
5. Expliquer ce que fait la fonction Python suivante :

```python
def fonction_mystere(n):
    m = n
    z = 0
    for i in range(1,n+1):
        a,b = tirage(m)
        n1 = a % n
```

```
        n2 = b % n
        if a == b:
            z = z + 1
            m = m - 1
    return z
```

Exercice 3 - ECRICOME ECS 2016 (Exercice 1)

On pourra utiliser sans justification que $2 < e^1 < 3$.
On s'intéresse dans cet exercice à la série de terme général $u_n = (-1)^n \frac{\ln n}{n}$ pour $n \geqslant 1$.

1. On note $\forall n \geqslant 1, w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$.
   (a) Rappeler les développements limités à l'ordre 2 lorsque x tend vers 0 de $\ln(1+x)$ et $\frac{1}{1+x}$.
   (b) Montrer alors que : $w_{n+1} - w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}$.
   (c) Montrer que la série de terme général $(w_{n+1} - w_n)$ converge, puis que la suite (w_n) converge vers un réel γ appelé **constante d'Euler**.
2. Étudier les variations de la fonction $\varphi : t \mapsto \frac{\ln t}{t}$ sur $]0, +\infty[$. Dresser le tableau de variations de la fonction φ en précisant les limites aux bornes de son ensemble de définition.
3. On note pour tout entier $n \geqslant 1$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$.
   (a) Montrer que les suites $(S_{2n})_{n\geqslant 2}$ et $(S_{2n+1})_{n\geqslant 2}$ sont adjacentes.
   (b) Montrer que la série de terme général u_n converge. Est-elle absolument convergente ?
4. On note pour tout entier $n \geqslant 1$, $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k} - \frac{(\ln(n))^2}{2}$.
   (a) Justifier que pour tout entier $n \geqslant 3$, on a : $\dfrac{\ln(n+1)}{n+1} \leqslant \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t} dt$.
   (b) En déduire que la suite $(v_n)_{n\geqslant 3}$ est décroissante et convergente.
5. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$:
$$S_{2n} = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k}$$
   puis que :
$$S_{2n} = \ln(2)\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + v_n - v_{2n} - \frac{(\ln(2))^2}{2} - \ln(2)\ln(n).$$
6. Démontrer alors que : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n} = \gamma \ln(2) - \frac{(\ln(2))^2}{2}$.

Problème 4 - EDHEC ECS 2015 (Problème adapté)

Partie I

Dans cette partie, la lettre r désigne un entier naturel et x est un réel fixé de $]0, 1[$.

1. Montrer que lorsque n est au voisinage de $+\infty$, on a :
$$\binom{n}{r} \sim \frac{n^r}{r!}.$$
2. (a) Donner la valeur de $\lim_{n\to+\infty} n^{r+2} x^n$.

(b) En déduire que la série de terme général $\binom{n}{r} x^n$ est convergente.

3. (a) Pour tout entier naturel r, on pose :

$$S_r = \sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^n.$$

Donner la valeur de S_0.

(b) Établir, en utilisant la formule du triangle de Pascal, que : $(1-x)S_{r+1} = xS_r$.

(c) En déduire que :

$$\forall x \in]0,1[,\ \forall r \in \mathbb{N},\ \sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^n = \frac{x^r}{(1-x)^{r+1}}.$$

(d) Donner enfin la valeur de $\sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^{n-r}$.

Partie II

On désigne par α et p deux réels de $]0,1[$. Un joueur participe à un jeu constitué d'une suite de manches.
Avant chaque manche y compris la première, le joueur a une probabilité α de ne pas être autorisé à jouer la manche en question (on dit qu'il est disqualifié, et c'est définitif) et une probabilité $1-\alpha$ d'y être autorisé, et ceci indépendamment du fait qu'il ait gagné ou perdu la manche précédente s'il y en a eu une. À chaque manche jouée, le joueur gagne un euro avec la probabilité p et perd un euro avec la probabilité $1-p$.
Si le jeu a commencé, le joueur joue jusqu'à ce qu'il soit disqualifié, et on suppose que les manches sont jouées de façon indépendante. On note :

- X le nombre de manches jouées par le joueur avant d'être disqualifié ;
- Y le nombre de manches gagnées par le joueur ;
- G le gain du joueur à la fin du jeu.

On admet que X, Y et G sont des variables aléatoires définies toutes les trois sur le même espace probabilisé.

4. (a) Donner la loi de X.

On pourra noter D_k l'événement « Le joueur ne joue pas la $k^{\text{ème}}$ manche ».

(b) On pose $T = X + 1$. Reconnaître le loi de T puis en déduire que l'on a :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1-\alpha}{\alpha}.$$

(c) En déduire également la valeur de $V(X)$.

5. (a) Déterminer, pour tout entier naturel n, la loi conditionnelle de Y sachant $[X = n]$.

(b) En déduire à l'aide de la partie I la loi de Y.

6. Calculer l'espérance de Y, puis montrer que :

$$V(Y) = \frac{p(1-\alpha)(p+\alpha-p\alpha)}{\alpha^2}.$$

7. (a) Exprimer G en fonction de X et Y.

(b) En déduire l'espérance de G.

(c) On admet l'existence de $\mathbb{E}(XY)$ et que :

$$\mathbb{E}(XY) = \frac{p(1-\alpha)(2-\alpha)}{\alpha^2}.$$

En déduire la variance de G.

8. (a) Compléter, en utilisant les générateurs de `numpy` en `Python`, la fonction suivante pour qu'elle simule l'expérience aléatoire étudiée et renvoient les valeurs prises par X et Y.

```python
def simulation(alpha,p):
    X = .......
    Y = .......
    return X,Y
```

(b) Comment modifier les instructions précédentes pour calculer et renvoyer la valeur prise par G ?