DS2 Appli - Algèbre linéaire, séries, probabilités

Exercice 1 - EM Lyon ECE 2011 (Exercice 2 - extrait adapté)

Partie I - Détermination des puissances de A

1. A possède deux lignes identiques et est donc non inversible.
2. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. On a :
$$\boxed{AX = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ x+y+z \\ x+y+3z \end{pmatrix}.}$$
3. Vérifions que $E_0(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a :
   - $\boxed{E_0(A) \subset \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$ par définition.
   - On a $A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

     $\boxed{\text{Donc } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in E_0(A).}$
   - Soient $X, X' \in E_0(A)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :
   $$A(X+\lambda X') = \underbrace{AX}_{=0\times X} + \lambda \underbrace{AX'}_{=0\times X'} = 0 \times (X + \lambda X').$$
     Donc $X + \lambda X' \in E_0(A)$ et donc $\boxed{E_0(A) \text{ est stable par combinaison linéaire.}}$

   Ainsi $\boxed{E_0(A) \text{ est bien un sous-espace vectoriel de } \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R}).}$

   De plus, soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a :
$$\begin{aligned}
X \in E_0(A) \quad & \Leftrightarrow \quad AX = 0 \times X \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x+y+z \\ x+y+z \\ x+y+3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x+y+z = 0 \\ x+y+z = 0 \\ x+y+3z = 0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x+y+z = 0 \\ x+y+3z = 0 \end{cases} \\
& \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Leftrightarrow} \quad \begin{cases} x+y+z = 0 \\ 2z = 0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x+y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow \quad X \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right).
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{E_0(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right).}$ $\boxed{\text{La famille } \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)}$ est donc génératrice de $E_0(A)$. Elle est clairement libre (un seul vecteur non nul). C'est donc une $\boxed{\text{base de } E_0(A).}$

D'où finalement : $\boxed{\dim E_0(A) = 1.}$

4. Le cas de $E_1(A)$ se traite de manière parfaitement analogue. On trouve (à un facteur près) la base : $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ et $\dim E_1(A) = 1$.

5. De même, pour $E_4(A)$, on trouve (à un facteur près) la base : $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ et $\dim E_4(A) = 1$.

6. On a $\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$. Donc :

$$\boxed{\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.}$$

On remarque $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) = P$.

Note : on peut ne pas trouver la même matrice suivant les vecteurs de bases choisis précédemment.

7. On pourrait vérifier que la famille $\mathcal{C}$ est libre. Dans ce cas, par considération sur les dimensions, c'est une base de $\text{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et donc la matrice précédente est donc une matrice de passage qui est donc inversible.

Mais l'exercice est construit pour pouvoir continuer même si on n'a pas exactement la même matrice. Donc suivons l'esprit de l'énoncé.

Appliquons des opérations élémentaires sur les lignes de P, en appliquant simultanément les mêmes à la matrice identité :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow 2L_3 + L_2}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{(à ce stade, on voit que } P \text{ est inversible)}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow \frac{1}{6}L_3}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_3}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & -1/3 \\ 1/6 & 1/6 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Donc P est inversible et :

$$\boxed{P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.}$$

8. On calcule :

$$AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 8 \end{pmatrix}.$$

Puis :

$$P^{-1}AP = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Donc $\boxed{D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ est bien une matrice diagonale.}}$

9. Procédons par récurrence.
   - **Initialisation :** On a :
   $$A^0 = I$$
   et :
   $$PD^0P^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I.$$
   Donc $\boxed{A^0 = PD^0P^{-1}.}$
   - **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $A^n = PD^nP^{-1}$.
   On a alors :
   $$A^{n+1} = A^n \times A = (PD^nP^{-1}) \times (PDP^{-1}) = PD^nDP^{-1} = \boxed{PD^{n+1}P^{-1}.}$$
   La propriété est bien héréditaire.

   Donc par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, on a bien $A^n = PD^nP^{-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

10. Comme D est diagonale, on a :

$$D^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 0^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}.$$

Donc :

$$\begin{aligned} A^n &= PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4^n \\ 0 & 1 & 4^n \\ 0 & -1 & 2^{2n+1} \end{pmatrix}\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \boxed{\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2^{2n}+2 & 2^{2n}+2 & 2(4^n-1) \\ 2^{2n}+2 & 2^{2n}+2 & 2(4^n-1) \\ 2(2^{2n}-1) & 2(2^{2n}-1) & 2(2^{2n+1}+1) \end{pmatrix}.} \end{aligned}$$

Partie II - Détermination d'une racine carrée de A

11. Avec les notations de l'énoncé, on a :

$$\begin{aligned} M^2 = A &\Leftrightarrow M^2 = PDP^{-1} \\ &\Leftrightarrow P^{-1}M^2P = D \\ &\Leftrightarrow P^{-1}M \times MP = D \\ &\Leftrightarrow P^{-1}MPP^{-1}MP = D \\ &\Leftrightarrow (P^{-1}MP)^2 = D \\ &\Leftrightarrow \boxed{N^2 = D.} \end{aligned}$$

12. On suppose $N^2 = D$. On a alors :

$$\boxed{ND = N \times N^2 = N^3 = N^2 \times N = DN.}$$

13. Notons :

$$N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

où $(a, b, c, d, e, g, h, i) \in \mathbb{R}^9$.
On suppose que $N^2 = D$. D'après la question précédente, on a $ND = DN$ c'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}.$$

Après calcul, cela revient à :

$$\begin{pmatrix} 0 & b & 4c \\ 0 & e & 4f \\ 0 & h & 4i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ 4g & 4h & 4i \end{pmatrix}.$$

On en déduit :

$$\begin{cases} b &= 0 \\ 4c &= 0 \\ d &= 0 \\ 4f &= f \\ 4g &= 0 \\ h &= 4h \end{cases}$$

puis :

$$\begin{cases} b &= 0 \\ c &= 0 \\ d &= 0 \\ f &= 0 \\ g &= 0 \\ h &= 0 \end{cases}.$$

Donc N est de la forme :

$$N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}.$$

Ainsi $\boxed{N \text{ est diagonale.}}$

14. Soit N une matrice diagonale. On note $N = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$. On a :

$$\begin{aligned}
N^2 = D \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1^2 = 0 \\ \lambda_2^2 = 1 \\ \lambda_3^2 = 4 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 \in \{-1, 1\} \\ \lambda_3 \in \{-2, 2\} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \boxed{N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ ou } N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ ou } N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ ou } N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.}
\end{aligned}$$

Ainsi on a :

$$\boxed{\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.}$$

15. En mettant bout à bout tout ce que l'on a dit, on en déduit que :

$$\boxed{M = P\Delta P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}}$$

est solution de $M^2 = A$.

Exercice 2 - ECRICOME ECE 2014 (Exercice 2)

1. On a $f(0) = 1 > 0$.
   Puis pour $x > 0$, on a $\ln(1+x) > \ln(1) = 0$ par stricte croissance de ln. Donc f est positive comme quotient sur $]0, +\infty[$. Donc $\boxed{f \text{ est strictement positive sur } \mathbb{R}_+.}$
   Puis montrons que u_n existe et est positif pour tout n par récurrence.
   - **Initialisation :** $u_0 = \mathrm{e}$ est bien défini et clairement positif.
   - **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que u_n est bien défini et positif.
     Comme u_n est positif, $f(u_n)$ existe à son tour. Et d'après le début de la question $f(u_n)$ est positif. Donc u_{n+1} est existe et est positif.

   Donc par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et est positif pour tout $n \in \mathbb{N}$. En particulier, $\boxed{(u_n) \text{ est bien défini.}}$
2.

```python
N = int(input("Entrez une valeur pour N: "))
u = np.exp(1)
for i in range(N):
    if u == 0:
        u = 1
    else:
        u = u/np.log(1+u)
print(u)
```

3. f est clairement continue sur $\mathbb{R}_+^\star$ par opérations sur les fonctions usuelles.
   De plus, on a :
$$\frac{x}{\ln(1+x)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{x} \underset{x\to 0}{\sim} 1 \xrightarrow[x\to 0]{} 1 = f(0).$$
   Donc f est également continue en 0.
   D'où $\boxed{f \text{ est continue sur } [0,+\infty[.}$

4. $\boxed{f \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+^\star}$ par opérations sur les fonctions usuelles.
   En particulier, $x \mapsto \ln(1+x)$ est $\mathcal{C}^1$ et ne s'annule pas sur $]0,+\infty[$ par composition. Donc le quotient $x \mapsto \frac{x}{\ln(1+x)}$ est également $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

5. On a :
$$\boxed{\ln(1+x) - \frac{x}{1+x} \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^2) - x\,(1 - x + \mathrm{o}(x)) \underset{x\to 0}{=} \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^2).}$$
   On en déduit :
$$\ln(1+x) - \frac{x}{1+x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}.$$
   Puis, f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$, on a :
$$\boxed{f'(x) = \frac{\ln(1+x) - x \times \frac{1}{1+x}}{(\ln(1+x))^2} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\frac{x^2}{2}}{x^2} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{2}.}$$

6. Vérifions que f est dérivable en 0. On a pour tout $x \in]0,+\infty[$:
$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\frac{x}{\ln(1+x)} - 1}{x} = \frac{x - \ln(1+x)}{x\ln(1+x)}.$$
   Or :
$$x - \ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - (x - \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^2)) = \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^2)$$
   et donc : $x - \ln(1+x) \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}$.
   Ainsi :
$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x - \ln(1+x)}{x\ln(1+x)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\frac{x^2}{2}}{x^2} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{2}.$$
   Donc f est dérivable en 0 et :
$$\boxed{f'(0) = \frac{1}{2}.}$$
   Comme $f'(x) \xrightarrow[x\to 0]{} f'(0)$, f' est bien continue en 0. Donc f' est continue sur $\mathbb{R}_+$ et ainsi $\boxed{f \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+.}$

7. Soit $x \geqslant \mathrm{e} - 1$. On a $\ln(x+1) \geqslant \underbrace{\ln(\mathrm{e}-1+1)}_{=1}$ par croissance de ln.
   Puis comme $x + 1 \geqslant \mathrm{e} > 0$, on a :
$$\boxed{(x+1)\ln(x+1) \geqslant x+1.}$$
   Comme $\ln(x+1) \geqslant 1 > 0$, on a en passant à l'inverse $\frac{1}{\ln(x+1)} \leqslant 1$ et donc en multipliant par $x > 0$:
$$\boxed{\underbrace{\frac{x}{\ln(x+1)}}_{=f(x)} \leqslant x.}$$
   De plus, on a pour tout $x \geqslant \mathrm{e} - 1$:
$$f'(x) = \frac{(1+x)\ln(x+1) - x}{(1+x)(\ln(1+x))^2}.$$
   D'après ce qui précède, le numérateur est positif, ainsi que $1 + x$. Donc $\boxed{f'(x) \geqslant 0.}$

8. Prouvons l'inégalité par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
   - **Initialisation :** On a $\boxed{u_0 = \mathrm{e} \geqslant \mathrm{e} - 1.}$
   - **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $u_n \geqslant \mathrm{e} - 1$.
     Comme $f'(x) \geqslant 0$ si $x \geqslant \mathrm{e} - 1$, f est croissante sur $[\mathrm{e} - 1, +\infty[$. Donc par croissance de f, on a :
     $$\underbrace{f(u_n)}_{u_{n+1}} \geqslant f(\mathrm{e} - 1).$$
     Or :
     $$f(\mathrm{e} - 1) = \frac{\mathrm{e} - 1}{\ln(1 + \mathrm{e} - 1)} = \mathrm{e} - 1.$$
     D'où :
     $$\boxed{u_{n+1} \geqslant \mathrm{e} - 1.}$$

   Ainsi, par récurrence, on a bien pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_n \geqslant \mathrm{e} - 1.}$
9. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $u_{n+1} \leqslant u_n$, c'est-à-dire que (u_n) est décroissante.
   - **Initialisation :** On a :
     $$u_1 = f(u_0) = \frac{\mathrm{e}}{\ln(1 + \mathrm{e})}.$$
     Or $\ln(1 + \mathrm{e}) \geqslant \ln(\mathrm{e}) = 1$ par croissance de ln. Donc $0 < \frac{1}{\ln(1+\mathrm{e})} \leqslant 1$ et donc par produit avec $\mathrm{e} > 0$, on a :
     $$\boxed{u_1 < u0.}$$
   - **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_{n+1} \leqslant u_n$. Montrons que $u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$.
     On a par croissance de f sur $[\mathrm{e} - 1, +\infty[$ (on a montré à la question précédente que $u_k \geqslant \mathrm{e} - 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$) :
     $$\boxed{\underbrace{f(u_{n+1})}_{=u_{n+2}} \geqslant \underbrace{f(u_n)}_{=u_{n+1}}.}$$

   Donc $\boxed{(u_n) \text{ est bien décroissante.}}$
   Comme (u_n) est minoré par $\mathrm{e} - 1$, d'après le théorème de la limite monotone, $\boxed{(u_n) \text{ converge vers } \ell \in \mathbb{R}.}$
   Comme $u_n \geqslant \mathrm{e} - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit que $\ell \in [\mathrm{e} - 1, +\infty[$ par passage à la limite.
   Comme f est continue sur $\mathbb{R}_+$, elle est en particulier continue en ℓ et donc, d'après le théorème du point fixe, $f(\ell) = \ell$.
   Or pour $x \in]0, +\infty[$, on a :
   $$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{x}{\ln(1 + x)} = x \Leftrightarrow \ln(1 + x) = 1 \Leftrightarrow 1 + x = \mathrm{e} \Leftrightarrow x = \mathrm{e} - 1.$$
   Donc $\boxed{(u_n) \text{ converge vers } \mathrm{e} - 1.}$

Exercice 3 - EDHEC ECE 2018 (Exercice 2)

1. (a) (A_0, A_1, A_2) est un système complet d'événements. On utilise alors la formule des probabilités totales :
   $$\begin{aligned} P(X = 1) &= P(A_0)\underbrace{P_{A_0}(X = 1)}_{=\frac{1}{2}} + P(A_1)\underbrace{P_{A_1}(X = 1)}_{=0} + P(A_2)\underbrace{P_{A_2}(X = 1)}_{=1} \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \boxed{= \frac{1}{2}.} \end{aligned}$$
   (b) Soit $n \geqslant 2$. On procède de même avec la formule des probabilités totales :
   $$P(X = n) = P(A_0)P_{A_0}(X = n) + P(A_1)\underbrace{P_{A_1}(X = n)}_{=0} + P(A_2)\underbrace{P_{A_2}(X = n)}_{=0}$$

On a $P_{A_2}(X=n)=0$ puisque $P_{A_2}(X=1)=1$ et $n\geqslant 2$.
Pour calculer $P_{A_0}(X=n)$ remarquons que c'est le rang d'apparition du premier pile dans une expérience de Bernoulli répétée de manière indépendante. C'est donc une loi géométrique et :

$$P_{A_0}(X=n)=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}.$$

Ainsi :

$$\boxed{P(X=n)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}.}$$

(c) On a nécessairement :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}P(X=k)=1$$

puisque $([X=k])_{k\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements.
Donc :

$$P(X=0)+P(X=1)+\sum_{k=2}^{+\infty}P(X=k)=1.$$

On peut le réécrire :

$$\begin{aligned}
P(X=0) &= 1-P(X=1)-\sum_{k=2}^{+\infty}P(X=k)\\
&= 1-\frac{1}{2}-\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\\
&= \frac{1}{2}-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2^2}\times\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\\
&\quad \text{(la série converge bien puisque } \left|\frac{1}{2}\right|<1)\\
&= \frac{1}{2}-\frac{1}{6}\boxed{=\frac{1}{3}.}
\end{aligned}$$

2. X admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{k=0}^{+\infty}kP(X=k)$ converge absolument. Comme $kP(X=k)\geqslant 0$, cela revient à la convergence usuelle.
Sous réserve de convergence, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{+\infty}kP(X=k) &= 0\times P(X=0)+1\times P(X=1)+\sum_{k=2}^{+\infty}kP(X=k)\\
&= \frac{1}{2}+\sum_{k=2}^{+\infty}k\times\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\\
&= \frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\sum_{k=1}^{+\infty}k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\\
&\quad \text{(on fait apparaître une série géométrique dérivée)}\\
&= \frac{1}{3}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2}\\
&\quad \text{(la série converge bien puisque } \left|\frac{1}{2}\right|<1)\\
&= \frac{1}{3}+\frac{2}{3}\boxed{=1.}
\end{aligned}$$

Donc X admet bien une espérance et on a :

$$\boxed{E(X)=1.}$$

3. Utilisons le théorème de transfert. $X(X-1)$ admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)P(X=k)$ converge absolument. Puisque $k(k-1)P(X=k)$ est positive (nulle pour $k \in \{0,1\}$), cela revient à la convergence usuelle.
Sous réserve de convergence, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)P(X=k) &= \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)P(X=k) \\
&\quad \text{(car } k(k-1)=0 \text{ si } k=0 \text{ ou } k=1) \\
&= \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) \times \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^k \\
&= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2^2} \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) \times \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} \\
&= \frac{1}{12} \times \frac{2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3} \\
&\quad \text{(la série converge encore une fois)} \\
&= \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

Donc $X(X-1)$ admet une espérance et $\boxed{E(X(X-1)) = \frac{4}{3}.}$
Or $X(X-1) = X^2 - X$. Comme X admet une espérance, on en déduit que X^2 admet une espérance. On a :

$$E(X^2) = E(X^2 - X) + E(X) = \frac{4}{3} + 1 = \frac{7}{3}.$$

Puis d'après la formule de Kœnig-Huygens, X admet une variance et :

$$\boxed{V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{7}{3} - 1^2 = \frac{4}{3}.}$$

4. Sans calcul : les mots "piles" et "faces" n'ont aucune importance vis-à-vis des calculs effectués et donc en les interchangeant, on trouve les mêmes résultats. En particulier, Y suit la même loi que X.
5. (a) Clairement, $[X=1] \cap [Y=j] \subset [Y=j]$. Montrons l'inclusion réciproque, cela revient à montrer que $Y=j$ implique $X=1$.
Or si $Y=j$ avec $j \geqslant 2$, alors le premier "pile" n'a lieu qu'au deuxième lancer et donc le premier lancer a donné "face". Donc effectivement $X=1$.
Donc $[X=1] \cap [Y=j] = [Y=j]$ puis :

$$\boxed{P([X=1] \cap [Y=j]) = P(Y=j).}$$

(b) Le raisonnement est strictement identique.
6. **Loi de $X+Y$.**
(a) Si on prend la pièce 1, on a systématiquement "face" et jamais "pile". En particulier, "face" est atteint dès le premier lancer donc $Y=1$. Et "face" n'est jamais atteint et donc $X=0$. Dans ce cas $X+Y=1$. Donc $X+Y$ peut prendre la valeur 1.
Si on prend la pièce 0 et qu'on fait n ($n \in \mathbb{N}^\star$) "piles" suivis d'une "face", alors $X=1$ (puisque "pile" apparaît dès le premier lancer) et $Y=n+1$ (puisque "face apparaît au lancer $n+1$). Donc $X+Y=n+2$. Donc $X+Y$ peut prendre n'importe quelle valeur supérieure ou égale à 3.
Montrons maintenant que $X+Y=0$ est impossible. Comme X et Y sont positives, cela impliquerait $X=0$ et $Y=0$. Cela implique que ni "pile" ni "face" n'est obtenu. C'est impossible.
Montrons enfin que $X+Y=2$ est impossible. Il y a trois possibilités :
   - $X=0$ et $Y=2$. Dans ce cas, le premier lancer n'est ni "face" (puisqu'il n'est atteint au deuxième lancer uniquement) ni "pile" (puisqu'il n'est jamais atteint). C'est impossible.

- $X = 2$ et $Y = 0$. C'est la situation symétrique en "pile" et "face" de la précédente. C'est également impossible.
- $X = 1$ et $Y = 1$. Dans ce cas, le premier lancer est à la fois "pile" et "face". C'est aussi impossible.

Donc $\boxed{(X+Y)(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0,2\}.}$

(b) Comme X et Y sont positives, les seules possibilités pour $X+Y=1$ sont $X=1$ et $Y=0$ ou $X=0$ et $Y=1$.
On a donc :
$$[X+Y=1] = ([X=1]\cap[Y=0]) \cup ([X=0]\cap[Y=1]).$$
Si $Y=0$, alors nécessairement le premier lancer est "pile". Donc $X=1$. Ainsi $[X=1]\supset[Y=0]$. Ainsi :
$$[X=1]\cap[Y=0]=[Y=0].$$
De même, on montrer que :
$$[X=0]\cap[Y=1]=[X=0].$$
Ainsi :
$$[X+Y=1]=[Y=0]\cup[X=0].$$
Comme les événements $[Y=0]$ et $[X=0]$ sont disjoints (puisque $X+Y=0$ d'après la question précédente), on a :
$$\boxed{P(X+Y=1)=P(Y=0)+P(X=0)=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}.}$$

(c) Nécessairement, le premier lancer donne "pile" (auquel cas, on a $X=1$) ou "face" (dans ce cas $Y=1$). Donc :
$$[X=1]\cup[Y=1]=\Omega.$$
Donc :
$$\begin{aligned}
[X+Y=n] &= [X+Y=n]\cap\Omega \\
&= [X+Y=n]\cap([X=1]\cup[Y=1]) \\
&= ([X+Y=n]\cap[X=1])\cup([X+Y=n]\cap[Y=1]) \\
&\quad \text{(distribution de } \cap \text{ sur } \cup \text{ - formule de Morgan)}
\end{aligned}$$
Or $[X+Y=n]\cap[X=1]=[1+Y=n]\cap[X=1]=[Y=n-1]\cap[X=1]$. Et de même, $[X+Y=n]\cap[Y=1]=[X=n-1]\cap[Y=1]$. D'où finalement :
$$\boxed{[X+Y=n]=([Y=n-1]\cap[X=1])\cup([X=n-1]\cap[Y=1]).}$$

(d) Comme $X+Y=2$ est impossible, les événements $[X=1]$ et $[Y=1]$ sont incompatibles.
En conséquence, $([Y=n-1]\cap[X=1])$ et $([X=n-1]\cap[Y=1])$ sont incompatibles.
Donc :
$$P([X+Y=n])=P([Y=n-1]\cap[X=1])+P([X=n-1]\cap[Y=1]).$$
D'après la question 5, on en déduit :
$$P([X+Y=n])=P(Y=n-1)+P(X=n-1).$$
Et donc :
$$\boxed{P([X+Y=n])=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.}$$

7. **Informatique.**

(a)

```python
piece = rd.randint(0, 3)
x = 1
if piece == 0:
    lancer = rd.randint(0, 2)
    while lancer == 0:
        lancer = rd.randint(0, 2)
        x = x+1
else:
    if piece == 1:
        x = 0
print(x)
```

(b) Le cas de la pièce 2 est en fait pris en compte. En effet, avec la pièce 2, on obtient uniquement des "piles". Donc $X = 1$. La valeur avec laquelle on a initialisé `x` en deuxième ligne convient donc sans avoir à la modifier.

Problème 4 - EDHEC ECE 2020 (Problème)

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions :
$$x \mapsto \frac{x^n}{1+x} \quad \text{et} \quad x \mapsto \frac{x^n}{1+x}$$
sont continues sur $[0,1]$. Donc $\boxed{\text{les intégrales } I_n \text{ et } J_n \text{ existent.}}$

2. On a :
$$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^1 \frac{x^0}{(1+x)^2}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2}\mathrm{d}x \\ &= \left[-\frac{1}{1+x}\right]_0^1 = -\frac{1}{2}+1 \boxed{= \frac{1}{2}.} \end{aligned}$$
puis :
$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 \frac{x^1}{(1+x)^2}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \frac{x+1-1}{(1+x)^2}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x+1}{(1+x)^2}\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2}\mathrm{d}x \quad \text{(linéarité de l'intégrale)} \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+x}\mathrm{d}x - I_0 = [\ln(1+x)]_0^1 - \frac{1}{2} \\ &= \ln(2)-\ln(1)-\frac{1}{2} \boxed{= \ln(2)-\frac{1}{2}.} \end{aligned}$$

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :
$$\begin{aligned} I_{n+2}+2I_{n+1}+I_n &= \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1+x)^2}\mathrm{d}x + 2\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2}\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \frac{x^{n+2}+2x^{n+1}+x^n}{(1+x)^2}\mathrm{d}x \quad \text{(linéarité de l'intégrale)} \\ &= \int_0^1 \frac{x^n(x^2+2x+1)}{(1+x)^2}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^n(x+1)^2}{(1+x)^2}\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 x^n\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{n+1} - \frac{0}{n+1} \boxed{= \frac{1}{n+1}.} \end{aligned}$$

(b) On a donc :

$$I_2 + 2I_1 + I_0 = 1.$$

On en déduit :

$$\boxed{I_2 = 1 - 2I_1 - I_0 = 1 - 2\left(\ln(2) - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - 2\ln(2).}$$

(c)

```
n = int(input("Donnez une valeur pour n: "))
a = 1/2
b = np.log(2) - 1/2
for k in range(2,n+1):
    aux = a
    a = b
    b = 1/(k-1) - 2*b - aux
print(b)
```

Remarque : le script proposé à compléter ne fonctionne pas pour $n = 0$.

4. (a) On a pour tout $x \in [0,1]$, $0 \leqslant \frac{x^n}{(1+x)^2}$. Donc par positivité de l'intégrale (avec les bornes dans le bon sens), on a :

$$\boxed{I_n \geqslant 0.}$$

De manière similaire, pour tout $x \in [0,1]$, on a $1 + x \geqslant 1$. Donc par croissance sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction carrée, on a $(1+x)^2 \geqslant 1$. En passant à l'inverse (tout est strictement positif), on obtient :

$$0 < \frac{1}{(1+x)^2} \leqslant 1.$$

Donc pour tout $x \in [0,1]$, on a :

$$\frac{x^n}{(1+x)^2} \leqslant x^n.$$

Par croissance de l'intégrale, on en déduit :

$$I_n \leqslant \underbrace{\int_0^1 x^n \mathrm{d}x}_{=\frac{1}{n+1}}$$

où on avait déjà calculer l'intégrale dans une question précédente.

Donc, on a bien pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}.}$$

(b) Comme $\frac{1}{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, d'après le théorème des gendarmes, (I_n) converge et :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} I_n = 0.}$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Posons $u(x) = x^n$ et $v(x) = -\frac{1}{1+x}$ pour tout $x \in [0,1]$. u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. On peut donc procéder par intégration par parties :

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^1 \underbrace{x^n}_{=u(x)} \times \underbrace{\frac{1}{(1+x)^2}}_{=v'(x)} \mathrm{d}x \\
&= \left[\underbrace{x^n}_{=u(x)} \times \underbrace{\left(-\frac{1}{1+x}\right)}_{=v(x)}\right]_0^1 - \int_0^1 \underbrace{nx^{n-1}}_{=u'(x)} \times \underbrace{\left(-\frac{1}{1+x}\right)}_{=v(x)} \mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2} + 0 + n\int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x} \mathrm{d}x \boxed{= nJ_{n-1} - \frac{1}{2}.}
\end{aligned}$$

6. (a) On a donc $I_1 = 1 \times J_0 - \frac{1}{2}$. On en déduit :

$$\boxed{J_0 = I_1 + \frac{1}{2} = \ln(2) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \ln(2).}$$

Soit maintenant $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} J_n + J_{n+1} &= \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^n + x^{n+1}}{1+x}\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \frac{x^n(1+x)}{1+x}\mathrm{d}x = \int_0^1 x^n \mathrm{d}x \boxed{= \frac{1}{n+1}.} \end{aligned}$$

(b) Ainsi on a $J_1 + J_0 = 1$. D'où :

$$\boxed{J_1 = 1 - J_0 = 1 - \ln(2).}$$

7.

```python
n = int(input("Donner une valeur pour n: "))
J = np.log(2)
for k in range(1,n):
        J = 1/k - J
I = n*J - 1/2
print(I)
```

Remarque : encore une fois, le cas $n = 0$ ne semble pas prévu dans le script.

8. Procédons par récurrence.

- **Initialisation :** on a $J_1 = 1 - \ln(2)$.

  On a également :

$$(-1)^1 \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right) = -(\ln(2) - 1) = 1 - \ln(2).$$

  Donc $\boxed{J_1 = (-1)^1 \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right).}$

- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On suppose $J_n = (-1)^n \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right)$.

  On a alors :

$$\begin{aligned} J_{n+1} &= \frac{1}{n+1} - J_n \\ &= \frac{1}{n+1} - (-1)^n \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right) \\ &= \frac{-(-1)^{n+1}(-1)^n}{n+1} + (-1)^{n+1} \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right) \\ &= (-1)^{n+1} \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \frac{(-1)^n}{n+1} \right) \\ &= \boxed{(-1)^{n+1} \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right).} \end{aligned}$$

Donc, par récurrence, on a bien pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$:

$$\boxed{J_n = (-1)^n \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right).}$$

9. (a) Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on a : $I_n = nJ_{n-1} - \frac{1}{2}$. Donc pour $n \in \mathbb{N}$:

$$J_n = \frac{1}{n+1}\left(I_{n+1} + \frac{1}{2}\right).$$

Comme (I_n) converge vers 0, par opérations sur les limites, on en déduit :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} J_n = 0.}$$

(b) On a d'après la question précédente :

$$(-1)^n \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Donc :

$$\left|(-1)^n \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)\right| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

On en déduit :

$$\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

et donc :

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2).$$

Ainsi, la série de terme générale $\frac{(-1)^{k-1}}{k}$ converge et :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2).}$$

(c) On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$J_n = \frac{1}{n+1}\left(I_n + \frac{1}{2}\right).$$

Or $I_n \xrightarrow[n \to +\infty]{0}$ donc est négligeagle devant $\frac{1}{2}$. Donc :

$$\boxed{J_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n+1} \times \frac{1}{2} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2n}.}$$

10. (a) On a pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $J_n = (-1)^n u_n$. Donc :

$$\boxed{u_n = (-1)^n J_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{2n}.}$$

(b) La série de terme générale $\frac{(-1)^n}{2n}$ est à un facteur $-\frac{1}{2}$ près la même série que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ qui converge d'après les questions précédentes.

On ne peut cependant pas conclure quand à la convergence de la série de terme générale u_n car ces deux séries ne sont pas à termes positifs (et même ils n'ont pas de signe constant).

11. (a) On a pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $J_n = (-1)^n u_n$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $J_n + J_{n+1} = \frac{1}{n+1}$. Donc pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, on a :

$$(-1)^k u_k + (-1)^{k+1} u_{k+1} = \frac{1}{k+1}.$$

Puis :

$$(k+1)u_k - (k+1)u_{k+1} = (-1)^k.$$

Et donc :

$$\boxed{u_k = (k+1)u_{k+1} - ku_k + (-1)^k.}$$

(b) Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n}((k+1)u_{k+1} - ku_k + (-1)^k) \\ &= \sum_{k=1}^{n}(k+1)u_{k+1} - \sum_{k=1}^{n} ku_k + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k \\ &= \sum_{k'=2}^{n+1} k'u_{k'} - \sum_{k=1}^{n} ku_k + (-1) \times \frac{1-(-1)^n}{1-(-1)} \\ &= \boxed{(n+1)u_{n+1} - u_1 - \frac{1}{2}(1-(-1)^n).} \end{aligned}$$

(c) On a $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{2n}$. Donc :

$$nu_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{2}.$$

Donc $(2n)u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}$ qui est donc aussi sa limite. Et de même $(2n+1)u_{2n+1} \to -\frac{1}{2}$.
De plus, on a $(1-(-1)^{2n}) = 0$ et $(1-(-1)^{2n+1}) = 2$.
Donc :

$$\begin{aligned} S_{2n} &= (2n+1)u_{2n+1} - u_1 - \frac{1}{2}(1-(-1)^{2n}) = (2n+1)u_{2n+1} - (\ln(2)-1) \\ &= (2n+1)u_{2n+1} - \ln(2) + 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} \boxed{\frac{1}{2} - \ln(2).} \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned} S_{2n+1} &= (2n+2)u_{2n+2} - u_1 - \frac{1}{2}(1-(-1)^{2n+1}) = (2n+2)u_{2n+2} - (\ln(2)-1) - 1 \\ &= (2n+2)u_{2n+2} - \ln(2) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \boxed{\frac{1}{2} - \ln(2).} \end{aligned}$$

Puis d'après la proposition admise de l'énoncé, on a :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{2} - \ln(2).}$$

Donc la série de terme général u_k converge et :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = \frac{1}{2} - \ln(2).}$$

12. On a vu que $\ln(2) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j}$. On a donc :

$$u_n = \ln(2) - \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j-1}}{j} = \sum_{j=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j}.$$

Et donc, on vient de prouver que :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} = \frac{1}{2} - \ln(2).}$$