# CORRECTION DS 2 APPRO

## Exercice 1 - EDHEC ECS 2001

1. Surtout, on ne vérifie pas les 8 axiomes de la définition d'espaces vectoriels. Comme d'habitude, on vérifie si $E$ est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel. L'énoncé nous donne toutes les clefs : on nous dit que $\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est un espace vectoriel. C'est sans doute de là qu'il faut partir.
   Vérifions que $E$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ :
   - On a bien $E \subset \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ par définition.
   - $E$ est non vide, puisque la fonction nulle est dedans. En effet, posons :
   $$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 0 \end{array} \right. .$$
     Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $f''(x) = 0$ et $(1+x^2)f(x) = 0$ donc $f$ vérifie bien $(\star)$. Donc $f \in E$.
   - Soient désormais $f$ et $g$ dans $E$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Vérifions que $\lambda f + g \in E$. Comme $\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est un espace vectoriel, on a déjà $\lambda f + g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Il reste à vérifier que $\lambda f + g$ vérifie la relation $(\star)$.
     Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :
   $$\begin{array}{rcl} (\lambda f + g)''(x) & = & \lambda f''(x) + g''(x) \text{ (formule de dérivation)} \\ & = & \lambda(1+x^2)f(x) + (1+x^2)g(x) \text{ (car } f \text{ et } g \text{ vérifient } (\star)) \\ & = & (1+x^2)(\lambda f + g)(x). \end{array}$$
     Donc $\lambda f + g \in E$.

   Donc $E$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$. C'est donc bien un espace vectoriel.
2. Soient $u$ et $v$ deux éléments de $E$. Vérifions que $u'v - uv'$ est une constante.
   Comme $u$ et $v$ sont $\mathcal{C}^2$, $u'v - uv'$ est $\mathcal{C}^1$ et donc en particulier dérivable. On a, pour $x \in \mathbb{R}$ :
   $$\begin{array}{rcl} (u'v - uv')'(x) & = & u''(x)v(x) + u'(x)v'(x) - u'(x)v'(x) - u(x)v''(x) \\ & = & u''(x)v(x) - u(x)v''(x) \\ & = & (1+x^2)u(x)v(x) - u(x)(1+x^2)v(x) \text{ (car } u \text{ et } v \text{ vérifient } (\star)) \\ & = & 0. \end{array}$$
   Donc $u'v - uv'$ est bien constante sur $\mathbb{R}$.
3. (a) $f$ est bien $\mathcal{C}^2$ (elle est même $\mathcal{C}^\infty$) par opérations usuelles (ici composition). Il reste à vérifier que $f$ satisfait bien la relation $(\star)$.
   Pour $x \in \mathbb{R}$, calculons :
   $$f'(x) = x\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$$
   puis :
   $$f''(x) = 1 \times \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} + x \times x\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} = (1+x^2)\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} = (1+x^2)f(x).$$
   Donc on a bien $f \in E$.

   (b) $f$ ne s'annule pas (c'est une exponentielle), ainsi $t \mapsto \frac{1}{f(t)^2}$ est bien définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ et est même $\mathcal{C}^1$. La fonction $x \mapsto \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(f(t))^2}$ est la primitive de $t \mapsto \frac{1}{f(t)^2}$ qui s'annule en 0. Elle est donc $\mathcal{C}^2$. Ainsi $g$ est bien $\mathcal{C}^2$ comme produit de fonctions $\mathcal{C}^2$.
   Il reste à vérifier que $g$ satisfait la relation $(\star)$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On calcule :
   $$g'(x) = f'(x)\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(f(t))^2} + f(x) \times \frac{1}{(f(x))^2}.$$
   Puis :
   $$g''(x) = f''(x)\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(f(t))^2} + f'(x) \times \frac{1}{(f(x))^2} + f'(x) \times \frac{1}{(f(x))^2} + f(x) \times \frac{-2f'(x)}{(f(x))^3}.$$

On simplifie :
$$g''(x) = f''(x)\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(f(t))^2} + \frac{2f'(x)-2f'(x)}{(f(x))^2} = f''(x)\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(f(t))^2}.$$
Puis, comme $f$ vérifie $(\star)$, on a :
$$g''(x) = (1+x^2)f(x)\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(f(t))^2} = (1+x^2)g(x).$$
Donc $g$ vérifie bien $(\star)$ et donc $g \in E$.

4. (a) Soit $h \in E$. On sait que $f \in E$. D'après le résultat de la question 2, la fonction $h'f - hf'$ est donc constante. Notons cette constante $\lambda$.
On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ :
$$h'(x)f(x) - h(x)f'(x) = \lambda.$$
Le premier terme ressemble à la dérivée d'une fraction. Essayons de le faire apparaître. Comme $f$ ne s'annule jamais, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$ :
$$\frac{h'(x)f(x) - h(x)f'(x)}{(f(x))^2} = \frac{\lambda}{(f(x))^2}.$$
On peut réécrire cela sous la forme :
$$\left(\frac{h}{f}\right)'(x) = \frac{\lambda}{(f(x))^2}.$$
En intégrant, on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}$ :
$$\frac{h(x)}{f(x)} = \mu + \int_0^x \frac{\lambda \mathrm{d}t}{(f(t))^2}$$
où $\mu$ est une constante réelle indépendante de $x$. En passant, le dénominateur de l'autre côté, on trouve finalement :
$$h(x) = \mu f(x) + \lambda f(x)\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(f(t))^2} = \mu f(x) + \lambda g(x).$$
Ainsi $h$ est bien une combinaison linéaire de $f$ et $g$.

(b) D'après la question précédente, $(f, g)$ est une famille génératrice de $E$. Il reste à vérifier que la famille est libre (on ne peut malheureusement pas passer par les dimensions puisque la dimension de $E$ est inconnue).
Soient $\lambda$ et $\mu$ deux réels tels que :
$$\lambda f + \mu g = 0.$$
Montrons que $\lambda = \mu = 0$.
On a pour tout $x \in \mathbb{R}$ :
$$\lambda f(x) + \mu g(x) = 0.$$
Donc en particulier pour $x = 0$, on a :
$$\lambda f(0) + \mu g(0) = 0.$$
Or $f(0) = \mathrm{e}^{\frac{0^2}{2}} = 1$ et $g(0) = f(0)\int_0^0 \frac{\mathrm{d}t}{(f(t))^2} = 0$. Donc :
$$\lambda f(0) + \mu g(0) = \lambda \times 1 + \mu \times 0 = \lambda.$$
D'où $\boxed{\lambda = 0}$.
On a donc $\mu g = 0$. Il suffit d'évaluer à un point où $g$ est non nulle (par exemple $x = 1$) et on trouve $\boxed{\mu = 0}$.
Donc $(f, g)$ est bien libre. Et donc $(f, g)$ est une base de $E$.

## Exercice 2 - EDHEC ECS 2011

1. (a) $T_1$ est le rang du premier succès de « tirer deux boules avec le même numéro ».
Pour un unique tirage, notons $A_k$ l'événement : « le numéro de la première boule est $k$ ». Et notons $B_k$ l'événement : « le numéro de la seconde boule est $k$ ». Si on note le succès $S$, on a :

$$\begin{aligned} P(S) &= P\left(\bigcup_{k=1}^{n}(A_k \cap B_k)\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} P(A_k)P_{A_k}(B_k) \\ &\quad \text{(formule des probabilités totales avec } (A_k)_k \text{ comme s.c.e.)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \times \frac{1}{2n-1} \boxed{= \frac{1}{2n-1}.} \end{aligned}$$

Donc $T_1$ suit une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2n-1}$. Formellement :

$$\boxed{T_1 \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{2n-1}\right).}$$

On a donc :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^\star, P(T_1 = k) = \left(1 - \frac{1}{2n-1}\right)^{k-1} \times \frac{1}{2n-1}.}$$

(b) On a donc :

$$\boxed{E(T_1) = \frac{1}{\frac{1}{2n-1}} = 2n-1.}$$

2. (a) `rd.randint(2*n)` simule le tirage d'une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{U}(\llbracket 0, 2n-1 \rrbracket)$. Il y a donc $2n$ valeurs différentes correspondant au nombre de boules dans l'urne. Ainsi les boules sont représentées par un numéro de 0 à $2n-1$. Le but de la boucle est de simuler le second tirage qui ne suit pas une remise. Il faut donc que `b` soit différent de `a`. Et donc on boucle tant que c'est égal (ce qui explique l'initialisation de `b` à la valeur de `a`).

```python
def tirage(n):
    a = rd.randint(2*n)
    b = a
    while b == a:
        b = rd.randint(2*n)
    return a,b
```

(b) Le code utilise l'instruction `%` qui calcule le reste de la division euclidienne. Ainsi `n1` et `n2` sont des entiers entre 0 et $n-1$. À un décalage prêt, cela représente le numéro sur la boule. On tire donc tant que les numéros sont différents.

```python
def T1(n):
    n1 = 0
    n2 = 1
    t = 0
    while n1 != n2:
        a,b = tirage(n)
        n1 = a % n
        n2 = b % n
        t = t + 1
    return t
```

(c) Le sujet attendant visiblement la condition `a != b`. Dans ce cas, `a` représente le numéro sur la première boule et `b` le numéro sur la seconde boule et on regarde quand on obtient la première paire.

Les valeurs possibles pour `a` et `b` sont bonnes. En revanche, leurs probabilités sont mauvaises. Lors du tirage de la première boule, le numéro suit bien une loi uniforme. Mais puisqu'il n'y a pas de remise avant la seconde boule, le numéro de la seconde boule ne suit pas une telle loi. En effet, le numéro de la première boule est légèrement moins probable. C'est ça l'erreur de l'énoncé.

3. (a) $\boxed{X_i \text{ est le nombre de tirages supplémentaires nécessaires pour constituer la } i^{\text{ème}} \text{ paire.}}$

(b) Soit $i \in [\![1, n]\!]$.

- Si $i = 1$, alors $X_i = X_1 = T_1$ qui $\boxed{\text{suit une loi géométrique de paramètre } \frac{1}{2n-1}}$ et qui $\boxed{\text{a pour espérance } 2n-1.}$
- Si $i \neq 1$, alors $X_i = T_i - T_{i-1}$. On peut raisonner comme dans la première question : $X_i$ est le rang du premier succès (à partir de la $i^{\text{ème}}$ paire constituée) avec une probabilité de succès $\frac{1}{2(n-(i-1))-1}$ (raisonnement identique à la question 1 mais seul $n-(i-1)$ numéros sont encore dans l'urne). Donc :

$$\boxed{X_i \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{2n-2i+1}\right) \quad \text{et} \quad E(X_i) = 2n-2i+1.}$$

On remarque que la formule donnée dans le second cas s'applique également au premier cas.

(c) On a :

$$\begin{aligned} T_n &= (T_n - T_{n-1}) + (T_{n-1} - T_{n-2}) + \cdots + (T_2 - T_1) + T_1 \\ &= \sum_{k=2}^{n} (T_k - T_{k-1}) + T_1. \end{aligned}$$

Par linéarité de l'espérance, $\boxed{T_n \text{ admet une espérance}}$ et :

$$\boxed{E(T_n) = \sum_{k=2}^{n} (2n-2i+1) + 2n-1 = (2n+1)(n-1) - 2\frac{(n-1)(n+2)}{2} + 2n-1 = n^2.}$$

4. (a) On constituent 0 paires au bout de $n$ tirages si et seulement si il faut strictement plus de $n$ tirages pour obtenir la première paire. Formellement :

$$\boxed{[S_n = 0] = [T_1 > n].}$$

Donc :

$$\begin{aligned} P(S_n = 0) &= P(T_1 > n) = P(T_1 \geqslant n+1) \\ &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} P(T_1 = k) \\ &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{2n-1}\right)^{k-1} \times \frac{1}{2n-1} \\ &= \frac{1}{2n-1} \times \left(1 - \frac{1}{2n-1}\right)^{n} \times \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{1}{2n-1}\right)} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2n-1}\right)^{n} \boxed{= \left(\frac{2n-2}{2n-1}\right)^{n}.} \end{aligned}$$

(b) On a :

$$P(S_n = 0) = \left(\frac{2n-2}{2n-1}\right)^{n} = \exp\left(n \ln \frac{2n-2}{2n-1}\right).$$

Comme $\frac{2n-2}{2n-1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$, on a : $\ln \frac{2n-2}{2n-1} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{2n-2}{2n-1} - 1 \underset{n \to +\infty}{\sim} -\frac{1}{2n-1} \underset{n \to +\infty}{\sim} -\frac{1}{2n}$.

Ainsi :

$$\boxed{P(S_n = 0) = \exp\left(n \ln \frac{2n-2}{2n-1}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}.}$$

(c) Notons $A_k$ l'événement : « une paire a été constituée au $k^{\text{ème}}$ tirage ». On a alors :

$$[S_n = n] = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n.$$

D'après la formule des probabilités composées, on a :

$$P(S_n = n) = \underbrace{P(A_1)}_{=\frac{1}{2n-1}} \times \underbrace{P_{A_1}(A_2)}_{=\frac{1}{2(n-1)-1}} \times \underbrace{P_{A_1\cap A_2}(A_3)}_{=\frac{1}{2(n-2)-1}} \times \cdots \times \underbrace{P_{A_1\cap\cdots\cap A_{n-1}}(A_n)}_{=\frac{1}{2(n-(n-1))-1}} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2(n-k)-1}.$$

Commençons par le changement d'indice : $i = n - k$. On obtient :

$$P(S_n = n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{2i-1}.$$

Le produit ne contient que des termes impaires. Rajoutons les termes paires et compensons-les au numérateur :

$$\boxed{P(S_n = n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{2i}{(2i-1)(2i)} = \left(\prod_{i=1}^{n} 2i\right)\left(\prod_{k=1}^{2n} \frac{1}{k}\right) = \frac{2^n n!}{(2n)!}.}$$

5. Dans cette fonction, le nombre d'itérations de la boucle est fixé (à $n$). On simule donc $n$ tirages successifs. La variable $m$ est celle passée à `tirage` et diminue à chaque fois que `n1` et `n2` sont égaux. Elle représente donc le nombre de numéros distincts restant dans l'urne. La variable `z` part de 0 et augmente quand `n1` et `n2` sont égaux. Il s'agit donc du nombre de paires constituées. C'est aussi la valeur renvoyée. Donc la fonction renvoie une simulation du nombre de paires constitues sur $n$ tirages. $\boxed{\text{Il s'agit donc d'une simulation de } S_n.}$

## Exercice 3 - ECRICOME ECS 2016

1. (a) On a :

$$\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2).}$$

(b) On a donc :

$$\begin{aligned}
w_{n+1} - w_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \ln(n)\\
&= \frac{1}{n+1} - \ln \frac{n+1}{n}\\
&= \frac{1}{n} \times \frac{1}{1+\frac{1}{n}} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\\
&= \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \underset{x\to 0}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \underset{x\to 0}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\\
&= -\frac{1}{2n^2} + \underset{x\to 0}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).
\end{aligned}$$

Et donc, on a bien :

$$\boxed{w_{n+1} - w_n \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{1}{2n^2}.}$$

(c) Par comparaison de séries à termes de signe constant au voisinage de $+\infty$ (ici négatif), puisque la série $\sum\left(-\frac{1}{2n^2}\right)$ converge (critère de Riemann), $\boxed{\text{la série } \sum(w_{n+1}-w_n) \text{ converge également.}}$
De plus, pour $N \geqslant 2$, on a :

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{N-1}(w_{n+1}-w_n)}_{\text{converge quand } N\to+\infty} = w_N - w_1.$$

puisque c'est une somme télescopique. Donc $\boxed{\text{la suite } (w_N)_N \text{ converge également}}$ (vers $\sum_{n=1}^{+\infty}(w_{n+1}-w_n)+w_1$). On peut noter $\gamma$ sa limite réelle.

2. La fonction $\varphi : t \mapsto \frac{\ln t}{t}$ définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ est dérivable (comme quotient). On a de plus pour $t \in \mathbb{R}_+^\star$ :

$$\varphi'(t) = \frac{1}{t^2} - \frac{\ln t}{t^2} = \underbrace{\frac{1}{t^2}}_{>0}(1-\ln t).$$

Donc les variations de $\varphi$ sont données par le signe de $1-\ln t$.
De plus, on a :

$$\lim_{t\to0^+}\frac{\ln t}{t} = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t} = 0$$

où la seconde limite est obtenue par croissance comparée.
On en déduit le tableau de variation suivant :

| $t$ | $0$ | | $\mathrm{e}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $1-\ln t$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $\varphi'(t)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $\varphi(t)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $\varphi(\mathrm{e}) = \frac{1}{\mathrm{e}}$ | $\searrow$ | $0$ |

3. (a) Montrons que $(S_{2n})$ et $(S_{2n+1})$ sont adjacentes :

- **Déroissance de $(S_{2n})$ :** Soit $n \geqslant 2$. On a :

$$\begin{aligned}
S_{2(n+1)} - S_{2n} &= \sum_{k=1}^{2(n+1)}(-1)^k\frac{\ln k}{k} - \sum_{k=1}^{2n}(-1)^k\frac{\ln k}{k} \\
&= (-1)^{2n+2}\frac{\ln(2n+2)}{2n+2} + (-1)^{2n+1}\frac{\ln(2n+1)}{2n+1} \\
&= \frac{\ln(2n+2)}{2n+2} - \frac{\ln(2n+1)}{2n+1} \leqslant 0
\end{aligned}$$

où on a utilisé la décroissance de $t \mapsto \frac{\ln t}{t}$ sur $]\mathrm{e},+\infty[$. Donc $\boxed{(S_{2n}) \text{ est décroissante.}}$

- **Croissance de $(S_{2n+1})$ :** Soit $n \geqslant 2$. De manière similaire, on a :

$$S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} = -\frac{\ln(2n+3)}{2n+3} + \frac{\ln(2n+2)}{2n+2} \geqslant 0$$

Donc $\boxed{(S_{2n+1}) \text{ est croissante.}}$

- **Limite de $S_{2n} - S_{2n+1}$ :** On a :

$$\boxed{S_{2n} - S_{2n+1} = -(-1)^{2n+1}\frac{\ln(2n+1)}{2n+1} = \frac{\ln(2n+1)}{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.}$$

$\boxed{\text{Les suites sont donc bien adjacentes.}}$

(b) Comme $(S_{2n})$ et $(S_{2n+1})$ sont adjacentes, elles ont une limite réelle commune. Comme, de plus, il s'agit des termes pairs et impairs de la suite des sommes partielles, la suite des sommes partielles a, à son tour, cette même limite.

$\boxed{\text{Ainsi la série } \sum u_n \text{ converge.}}$

$\boxed{\text{La convergence n'est pas absolue}}$ puisque pour tout $n \geqslant 3$ :

$$\frac{\ln n}{n} \geqslant \frac{1}{n}$$

et que la série $\sum \frac{1}{n}$ est la série harmonique divergente.

4. (a) La fonction $\varphi$ est décroissante sur $]\mathrm{e}, +\infty[$. Donc pour $n \geqslant 3$ et $t \in [n, n+1]$, on a $\varphi(t) \geqslant \varphi(n+1)$. Par croissance de l'intégrale, on obtient :

$$\int_n^{n+1} \varphi(t)\mathrm{d}t \geqslant \underbrace{\int_n^{n+1} \varphi(n+1)\mathrm{d}t}_{=\varphi(n+1)}$$

Et donc :

$$\boxed{\frac{\ln(n+1)}{n+1} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t}\mathrm{d}t.}$$

(b) Soit $n \geqslant 3$. On a :

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\ln k}{k} - \frac{(\ln(n+1))^2}{2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k} + \frac{(\ln(n))^2}{2} \\
&= \frac{\ln(n+1)}{n+1} + \frac{(\ln(n))^2 - (\ln(n+1))^2}{2} \\
&\leqslant \int_n^{n+1} \frac{\ln t}{t}\mathrm{d}t + \frac{(\ln(n))^2 - (\ln(n+1))^2}{2} \\
&\leqslant \left[\frac{(\ln t)^2}{2}\right]_n^{n+1} + \frac{(\ln(n))^2 - (\ln(n+1))^2}{2} \\
&\leqslant 0.
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Donc la suite } (v_n) \text{ est décroissante (pour } n \geqslant 3).}$

Il faut ensuite minorer $v_n$ (pour obtenir une convergence monotone). Pour cela, il faut compléter l'encadrement de la question précédente :

$$\frac{\ln(n+1)}{n+1} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t}\mathrm{d}t \leqslant \frac{\ln(n)}{n}$$

ce qui se fait de la même manière. Pour $n \geqslant 3$, on peut alors affirmer :

$$\begin{aligned}
v_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k} - \frac{(\ln(n))^2}{2} \\
&= \frac{\ln(2)}{2} + \sum_{k=3}^{n} \frac{\ln k}{k} - \frac{(\ln(n))^2}{2} \\
&\geqslant \frac{\ln(2)}{2} + \sum_{k=3}^{n} \int_k^{k+1} \frac{\ln t}{t}\mathrm{d}t - \frac{(\ln(n))^2}{2} \\
&\geqslant \frac{\ln(2)}{2} + \int_3^{n+1} \frac{\ln t}{t}\mathrm{d}t - \frac{(\ln(n))^2}{2} \\
&\geqslant \frac{\ln(2)}{2} + \frac{(\ln(n+1))^2 - (\ln(3))^2}{2} - \frac{(\ln(n))^2}{2} \\
&\geqslant \frac{\ln(2) - (\ln(3))^2}{2} + \underbrace{\frac{(\ln(n+1))^2 - (\ln(n))^2}{2}}_{\geqslant 0} \\
&\geqslant \frac{\ln(2) - (\ln(3))^2}{2}.
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{(v_n) \text{ est minorée.}}$

D'après le théorème de la limite monotone, $\boxed{(v_n) \text{ est convergente.}}$

5. Pour $n \geqslant 1$, on a :

$$\begin{aligned}
2\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} &= 2\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k)}{2k} - \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k)}{2k} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\ln(2k+1)}{2k+1}\right)}_{\text{termes paires et impaires séparés}} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\ln(2k+1)}{2k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k \ln k}{k} \boxed{= S_{2n}.}
\end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}
2\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2) + \ln(k)}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} \\
&= \ln(2)\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} \\
&= \ln(2)\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + v_n + \frac{(\ln(n))^2}{2} - v_{2n} - \frac{(\ln(2n))^2}{2} \\
&= \ln(2)\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + v_n - v_{2n} + \frac{(\ln(n))^2 - (\ln(2) - \ln(n))^2}{2} \\
&= \ln(2)\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + v_n - v_{2n} + \frac{(\ln(n))^2 - \ln(2)^2 + \ln(n)^2 - 2\ln(2)\ln(n)}{2} \\
&= \ln(2)\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + v_n - v_{2n} - \frac{(\ln(2))^2}{2} - \ln(2)\ln(n).
\end{aligned}$$

On a donc :

$$\boxed{S_{2n} = \ln(2)\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + v_n - v_{2n} - \frac{(\ln(2))^2}{2} - \ln(2)\ln(n).}$$

6. On peut réécrire l'égalité précédente sous la forme :

$$S_{2n} = \ln(2)\underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n)\right)}_{=w_n} + v_n - v_{2n} - \frac{(\ln(2))^2}{2}.$$

Comme $(v_n)$ converge, on a $v_n - v_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Et comme $w_n \to \gamma$, on a :

$$S_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \gamma\ln(2) - \frac{(\ln(2))^2}{2}.$$

Or, comme $(S_n)$ converge, elle converge vers la même limite que $(S_{2n})$ qui en est une suite extraite. Donc, on a bien :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\ln(n)}{n} = \gamma\ln(2) - \frac{(\ln(2))^2}{2}.}$$

## Problème 4 - EDHEC ECS 2015

### Partie I

1. Il y a une petite difficulté ici : la formule habituelle des coefficients binomiaux ($\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$) n'est valable que si $k \in [\![0, n]\!]$. Mais ici, on ne connaît pas *a priori* l'ordre entre $r$ et $n$.
Cependant, comme s'intéresse à ce qui se passe lorsque $n$ est au voisinage de $+\infty$ et que $r$ est fixé, pour $n$ suffisamment grand, on aura $r \in [\![0, n]\!]$. On peut donc partir de la formule habituelle. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $r \in [\![0, n]\!]$. On a :
$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-r+1)}{r!}.$$
Le numérateur est un simple polynôme en $n$ (de degré $r$). Le numérateur est donc équivalent (quand $n \to +\infty$) à son terme de plus haut degré à savoir $n^r$.
On a donc, pour $r \in \mathbb{N}$ fixé :
$$\boxed{\binom{n}{r} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^r}{r!}.}$$

2. (a) Toute suite de la forme $n^\alpha$ est négligeable de vant $q^n$ si $|q| < 1$. Ici, on a donc :
$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} n^{r+2}x^n = 0.}$$

   (b) On a donc, pour $x \in ]0, 1[$ et $r \in \mathbb{N}$ :
$$\binom{n}{k}x^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^r}{r!}x^n.$$
Or d'après la question précédente, on a :
$$n^r x^n = o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$
Donc :
$$\boxed{\binom{n}{k}x^n = o\left(\frac{1}{n^2}\right).}$$
Comme on a des termes positifs, on peut appliquer les critères de comparaison. La série des $\frac{1}{n^2}$ est convergente donc la série des $\binom{n}{k}x^n$ l'est aussi.

3. (a) Explicitons ce qu'on nous demande. On a, pour $x \in ]0,1[$ :

$$\begin{aligned} S_0 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n}{0} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} 1 \times x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} x^n. \end{aligned}$$

La série des $x^n$ est bien connue [1] et pour $x \in ]-1,1[$, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Et donc :

$$\boxed{S_0 = \frac{1}{1-x}.}$$

(b) Pour $x \in ]0,1[$ et $r \in \mathbb{N}$, calculons :

$$\begin{aligned} \boxed{(1-x)S_{r+1}} &= (1-x) \sum_{n=r+1}^{+\infty} \binom{n}{r+1} x^n \\ &= \sum_{n=r+1}^{+\infty} \binom{n}{r+1} x^n - \sum_{n=r+1}^{+\infty} \binom{n}{r+1} x^{n+1} \\ &= \sum_{n=r+1}^{+\infty} \binom{n}{r+1} x^n - \sum_{m=r+2}^{+\infty} \binom{m-1}{r+1} x^m \\ &\quad \text{(changement d'indice } m = n+1) \\ &= \binom{r+1}{r+1} x^{r+1} + \sum_{n=r+2}^{+\infty} \left( \binom{n}{r+1} - \binom{n-1}{r+1} x^n \right) \\ &= x^{r+1} + \sum_{n=r+2}^{+\infty} \binom{n-1}{r} x^n \\ &\quad \text{(formule de Pascal)} \\ &= x^{r+1} + \sum_{m=r+1}^{+\infty} \binom{m}{r} x^{m+1} \\ &\quad \text{(changement d'indice } m = n-1) \\ &= x \left( x^r + \sum_{n=r+1}^{+\infty} \binom{n}{r} x^n \right) \\ &= x \sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^n \\ &= \boxed{xS_r.} \end{aligned}$$

(c) On peut réécrire la formule précédente pour $x \in ]0,1[$ et $r \in \mathbb{N}$ :

$$S_{r+1} = \frac{x}{1-x} S_r.$$

$(S_r)$ est donc une suite géométrique de raison $\frac{x}{1-x}$ et de premier terme $S_0 = \frac{1}{1-x}$. Donc :

$$\boxed{S_r = S_0 \left( \frac{x}{1-x} \right)^r = \frac{x^r}{(1-x)^{r+1}}.}$$

1. On peut la retrouver comme la somme d'une géométrique si on l'a oublié.

(d) On a :

$$\boxed{\sum_{n=r}^{+\infty}\binom{n}{r}x^{n-r}=\frac{1}{x^r}\sum_{n=r}^{+\infty}\binom{n}{r}x^r=\frac{1}{x^r}\times\frac{x^r}{(1-x)^{r+1}}=\frac{1}{(1-x)^{r+1}}.}$$

**Partie II**

4. (a) Trouver la loi de $X$, c'est trouver les probabilités $\mathbb{P}([X=k])$ pour tout $k\in\mathbb{N}$ (puisque $X$ est à valeurs dans $\mathbb{N}$). Essayons de formuler l'événement $[X=k]$ pour $k\in\mathbb{N}$ fixé. On peut par exemple écrire :

$$[X=k]=\overline{D_1}\cap\overline{D_2}\cap\ldots\cap\overline{D_k}\cap D_{k+1},$$

c'est-à-dire que pour que le joueur joue exactement $k$ manches, il faut qu'il joue à la première, puis à la deuxième, etc, jusqu'à la $k^{\text{ème}}$ puis qu'il ne joue pas à la $(k+1)^{\text{ème}}$.
Appliquons désormais la formule des probabilités composées. On a :

$$\begin{array}{rcl}\mathbb{P}([X=k]) & = & \mathbb{P}(\overline{D_1}\cap\overline{D_2}\cap\ldots\cap\overline{D_k}\cap D_{k+1})\\ & = & \mathbb{P}(\overline{D_1})\mathbb{P}_{\overline{D_1}}(\overline{D_2})\ldots\mathbb{P}_{\overline{D_1}\cap\overline{D_2}\cap\ldots\cap\overline{D_{k-1}}}(\overline{D_k})\mathbb{P}_{\overline{D_1}\cap\overline{D_2}\cap\ldots\cap\overline{D_k}}(D_{k+1}).\end{array}$$

On a déjà $\mathbb{P}(\overline{D_1})=1-\alpha$.
De même, d'après l'énoncé, on a :

$$\mathbb{P}_{\overline{D_1}\cap\overline{D_2}\cap\ldots\cap\overline{D_i}}(\overline{D_{i+1}})=1-\alpha$$

c'est-à-dire que la probabilité de jouer à la manche $i+1$ sachant qu'on a joué la manche $i$ est $1-\alpha$.
Et enfin, on a :

$$\mathbb{P}_{\overline{D_1}\cap\overline{D_2}\cap\ldots\cap\overline{D_k}}(D_{k+1})=\alpha$$

En effet, la probabilité d'être disqualifié au début d'une manche - ce qui est exactement le cas lorsqu'on a joué jusqu'à $k$ et qu'on ne joue pas à la $k+1$ - est $\alpha$.
Donc :

$$\boxed{\mathbb{P}([X=k])=(1-\alpha)^k\alpha.}$$

(b) La loi de $T$ est donnée par, pour $k\in\mathbb{N}^\star$ :

$$\boxed{\mathbb{P}([T=k])=\mathbb{P}([X+1=k])=\mathbb{P}([X=k-1])=(1-\alpha)^{k-1}\alpha.}$$

Donc $T$ suit une loi géométrique de paramètre $\alpha$.
Donc $\mathbb{E}(T)=\frac{1}{\alpha}$. Et par linéarité de l'espérance, on a :

$$\boxed{\mathbb{E}(X)=\mathbb{E}(T-1)=\frac{1}{\alpha}-1=\frac{1-\alpha}{\alpha}.}$$

(c) De manière similaire, on a :

$$\boxed{V(X)=V(T-1)=V(T)=\frac{1-\alpha}{\alpha^2}.}$$

5. (a) Lorsque $X=n$, on répète une expérience de Bernoulli $n$ fois avec une probabilité de succès $p$. Le nombre de succès est donc décrit par une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. On a donc :

$$\boxed{\mathbb{P}_{[X=n]}([Y=k])=\left\{\begin{array}{rl}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} & \text{si}\quad k\in[\![0,n]\!]\\ 0 & \text{si}\quad k>n\end{array}\right..}$$

(b) Le système d'événements $\{[X = n], n \in \mathbb{N}\}$ forme un système complet d'événement. Appliquons la formule des probabilités totales afin de trouver la loi de $Y$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
\boxed{\mathbb{P}([Y = k])} &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}([X = n])\mathbb{P}_{[X=n]}([Y = k]) \\
&= \sum_{n=k}^{\infty} (1-\alpha)^n \alpha \mathbb{P}_{[X=n]}([Y = k]) \\
& \quad \text{(on enlève les premiers termes car } \mathbb{P}_{[X=n]}([Y = k]) = 0 \text{ si } n < k) \\
&= \sum_{n=k}^{\infty} (1-\alpha)^n \alpha \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= (1-\alpha)^k \alpha p^k \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} (1-\alpha)^{n-k}(1-p)^{n-k} \\
& \quad \text{(on sort tout ce qui ne dépend pas de } n) \\
&= (1-\alpha)^k \alpha p^k \frac{1}{(1-(1-\alpha)(1-p))^{k+1}} \\
& \quad \text{(formule de la première partie)} \\
&= \boxed{\frac{(1-\alpha)^k \alpha p^k}{(\alpha + p - \alpha p)^{k+1}}.}
\end{aligned}$$

6. On essaie d'interpréter la loi de $Y$.
En effet, essayons de réécrire la loi de $Y$ :

$$\mathbb{P}(Y = k) = \frac{(1-\alpha)^k \alpha p^k}{(\alpha + p - \alpha p)^{k+1}} = \frac{\alpha}{\alpha + p - \alpha p} \left( \frac{(1-\alpha)p}{\alpha + p - \alpha p} \right)^k.$$

On remarque ici que toute la dépendance à $k$ se trouve dans la puissance. Cela fait songer à une loi géométrique. On est donc poussé à poser :

$$\boxed{1 - q = \frac{(1-\alpha)p}{\alpha + p - \alpha p}.}$$

$1 - q$ est alors tout ce qui est dans la parenthèse et est ce qui devrait jouer le rôle de la probabilité d'échec. $1 - q$ est bien inférieur à 1 (le dénominateur est plus grand que le numérateur) et mérite donc le nom de probabilité. Calculons alors $q$ :

$$\begin{aligned}
q &= 1 - \frac{(1-\alpha)p}{\alpha + p - \alpha p} \\
&= \frac{\alpha + p - \alpha p - p - \alpha p}{\alpha + p - \alpha p} \\
&= \frac{\alpha}{\alpha + p - \alpha p}.
\end{aligned}$$

Cette quantité est exactement celle qui apparaît en facteur dans la loi de $Y$. On a en effet :

$$\boxed{\mathbb{P}([Y = k]) = q(1-q)^k.}$$

Ce n'est pas *tout à fait* une loi géométrique, mais on peut reconnaître *exactement la même loi* que celle de $X$ en substituant $\alpha$ par $q$. Il suffit alors d'appliquer les formules déjà trouvées pour $X$ :

$$\begin{aligned}
\boxed{\mathbb{E}(Y)} &= \frac{1-q}{q} \\
&= \frac{1 - \frac{\alpha}{\alpha+p-\alpha p}}{\frac{\alpha}{\alpha+p-\alpha p}} \\
&= \frac{\alpha + p - \alpha p - \alpha}{\alpha} \\
&= \boxed{\frac{p(1-\alpha)}{\alpha}.}
\end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}
\boxed{V(Y)} &= \frac{1-q}{q^2}\\
&= \frac{1-\frac{\alpha}{\alpha+p-\alpha p}}{\left(\frac{\alpha}{\alpha+p-\alpha p}\right)^2}\\
&= \frac{(\alpha+p-\alpha p-\alpha)(\alpha+p-\alpha p)}{\alpha^2}\\
&= \boxed{\frac{p(1-\alpha)(\alpha+p-\alpha p)}{\alpha^2}.}
\end{aligned}$$

7. (a) Le nombre de manches jouées est $X$, le nombre de manches gagnées est $Y$ et donc le nombre de manches perdues est $X-Y$. Comme on gagne un euro à chaque manche gagnée et on en perd un à chaque manche perdue, on a :

$$\boxed{G = 1\times Y + (-1)\times(X-Y) = 2Y - X.}$$

(b) Par linéarité de l'expérance, on a :

$$\boxed{\mathbb{E}(G) = \mathbb{E}(2Y-X) = 2\frac{p(1-\alpha)}{\alpha} - \frac{1-\alpha}{\alpha} = \frac{(2p-1)(1-\alpha)}{\alpha}.}$$

(c) Cette question est un délicate car il nous manque la notion de covariance qui permet de la traiter plus efficacement. On peut tout de même la faire, mais ça prend quelques étapes en plus. On a :

$$\begin{aligned}
V(G) &= V(2Y-X)\\
&= \mathbb{E}((2Y-X)^2) - (\mathbb{E}(2Y-X))^2\\
&\quad \text{(Formule de Huygens)}\\
&= \mathbb{E}(4Y^2+X^2-4XY) - (2\mathbb{E}(Y)-\mathbb{E}(X))^2\\
&= 4\mathbb{E}(Y^2)+\mathbb{E}(X^2)-4\mathbb{E}(XY)-4\mathbb{E}(Y)^2-\mathbb{E}(X)^2+4\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)\\
&= 4V(Y)+V(X)-4(\mathbb{E}(XY)-\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)).
\end{aligned}$$

On connaît déjà les deux premières variances. La dernière quantité entre parenthèses est la covariance de $X$ et de $Y$ que nous verons dans un chapître ultérieur. Calculons :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(XY)-\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) &= \frac{(1-\alpha)(2-\alpha)p}{\alpha^2} - \frac{1-\alpha}{\alpha}\times\frac{p(1-\alpha)}{\alpha}\\
&= \frac{p(1-\alpha)(2-\alpha-(1-\alpha))}{\alpha^2}\\
&= \frac{p(1-\alpha)}{\alpha^2}.
\end{aligned}$$

On reprend donc :

$$\begin{aligned}
\boxed{V(G)} &= 4V(Y)+V(X)-4(\mathbb{E}(XY)-\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y))\\
&= 4\frac{(1-\alpha)p(p+\alpha-\alpha p)}{\alpha^2} + \frac{1-\alpha}{\alpha^2} - 4\frac{p(1-\alpha)}{\alpha^2}\\
&= \frac{1-\alpha}{\alpha^2}\left(4p(p+\alpha-\alpha p)+1-4p\right)\\
&= \frac{1-\alpha}{\alpha^2}\left(4p(p+\alpha-\alpha p-1)+1\right)\\
&= \frac{1-\alpha}{\alpha^2}\left(-4p(1-p)(1-\alpha)+1\right)\\
&= \boxed{\frac{(1-\alpha)(1-4p(1-p)(1-\alpha))}{\alpha^2}.}
\end{aligned}$$

8. (a) Comme on l'a vu, on peut construitre $X$ à partir d'une loi géométrique. On s'en sert ici en utilisant le générateur `numpy.random.poisson`. Une fois $X$ connu, $Y$ suit une loi conditionnelle binomiale de paramètres $X$ et $p$.

```python
def simulation(alpha,p):
    X = rd.poisson(alpha)-1
    Y = rd.binomial(X,p)
    return X, Y
```

(b)

```python
def simulation(alpha,p):
        X = rd.poisson(alpha)-1
        Y = rd.binomial(X,p)
        G = 2*Y - X
        return X, Y, G
```