Chapitre 6 - Couples de variables aléatoires

1 Lois d'un couple

1.1 Loi conjointe

Définition : Loi conjointe

Pour tout couple de v.a.r. discrètes (X,Y), on appelle **loi du couple** (X,Y) ou **loi conjointe** la donnée :

- des supports $X(\Omega)=\{x_1,x_2,\ldots\}$ et $Y(\Omega)=\{y_1,y_2,\ldots\}$;
- des probabilités $p_{ij}=\mathbb{P}([X=x_i]\cap[Y=y_j])$ pour $(x_i,y_j)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)$.

Exemple : loi conjointe pour un lancer de deux dés équilibrés indépendants.

Proposition

Pour toute loi conjointe, on a : $\forall i,j,\ p_{i,j}\geqslant 0$ et $\sum_{i,j} p_{i,j}=1$.
La réciproque est vraie : cela caractérise les lois conjointes.

Exemple : une urne contient 2 boules blanches et 2 boules noires. On tire 3 boules simultanément. Loi conjointe de (X,Y) où X est le nombre de boules blanches tirées et Y le nombre de boules noires ?

1.2 Lois marginales

Définition : Lois marginales

Si (X,Y) est un couple de v.a.r.d., les lois de X et Y séparément sont appelées les **lois marginales**.

Proposition

On a : $\mathbb{P}(X=x_i)=\displaystyle\sum_{y_j\in Y(\Omega)}\mathbb{P}([X=x_i]\cap[Y=y_j])$.

Exemple : déterminer la loi marginale de X dans l'exemple précédent.

1.3 Lois conditionnelles

Définition : Loi conditionnelle

Pour un événement $[X=x_i]$ fixé de probabilité non nulle, on appelle **loi conditionnelle de Y sachant** $[X=x_i]$ la loi donnée par :

$$\forall y_j\in Y(\Omega),\ \mathbb{P}(Y=y_j|X=x_i)=\mathbb{P}_{[X=x_i]}(Y=y_j).$$

Exemple : déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $X=2$ dans l'exemple précédent.

Proposition

On a : $\forall y_j\in Y(\Omega),\ \mathbb{P}(Y=y_j)=\displaystyle\sum_{x_i\in X(\Omega)}\mathbb{P}(X=x_i)\mathbb{P}_{[X=x_i]}(Y=y_j)$.

1.4 Indépendance

Définition

On dit que deux v.a.r.d. X et Y sont indépendantes si :

$$\forall(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega),\ \mathbb{P}([X=x]\cap[Y=y])=\mathbb{P}(X=x)\mathbb{P}(Y=y).$$

Exemple : exemple précédent pas indépendant !
Propriétés :

- Tout événement concernant X est indépendant de tout événement concernant Y.
- Si f et g sont des fonctions définies sur $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes **(lemme des coalitions)**.

Exemple : X^2 et $Y+1$ sont indépendantes.

Corollaire

Si X et Y sont indépendantes, alors $[X\leqslant x]$ et $[Y\leqslant y]$ le sont également. Donc :

$$\mathbb{P}([X\leqslant x]\cap[Y\leqslant y])=\mathbb{P}(X\leqslant x)\mathbb{P}(Y\leqslant y).$$

2 Fonctions d'un couple de v.a.r.d.

2.1 Généralités

Proposition

Soient (X, Y) un couple de v.a.r.d. Soit $g : X(\Omega) \times Y(\Omega) \to \mathbb{R}$. Alors $Z = g(X, Y)$ définie par :

$$\forall \omega \in \Omega,\ Z(\omega) = g(X(\omega), Y(\omega))$$

est une varibale aléatoire réelle discrète.

Propriété : la loi de Z est donnée par :
$$\forall z \in Z(\Omega),\ \mathbb{P}(Z = z) = \sum_{\substack{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)\\ g(x,y)=z}} \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]).$$

Théorème : Théorème de transfert

Avec les notations précédentes, sous réserve de convergence absolue, on a :

$$E(g(X, Y)) = \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} g(x, y)\mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]).$$

Cas particulier du produit :

- $E(XY) = \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} xy\mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y])$.
- Si X et Y sont indépendantes :
  $E(XY) = \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} xy\mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y) = E(X)E(Y)$.

Propriétés de l'espérance :

- **Linéarité :** si $E(X)$ et $E(Y)$ existent, alors $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$ existe.
- **Positivité :** si $E(X)$ existe et si $0 \leqslant X$ presque sûrement alors $0 \leqslant E(X)$.
- **Croissance :** si $E(X)$ et $E(Y)$ existent et si $X \leqslant Y$ presque sûrement alors $E(X) \leqslant E(Y)$.

2.2 Somme de deux variables aléatoires

Proposition

Soient X et Y deux v.a.r.d. $X + Y$ est une variable aléatoire dont la loi est donnée par :

$$\forall s \in (X + Y)(\Omega),\ \mathbb{P}(X + Y = s) = \sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ s-x\in Y(\Omega)}} \mathbb{P}\left([X = x] \cap [Y = s - x]\right).$$

Remarque : à savoir démontrer !
Cas d'indépendance :

$$\mathbb{P}(X + Y = s) = \sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ s-x\in Y(\Omega)}} \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = s - x).$$

Proposition : Stabilité de la loi binomiale

Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1, p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n_2, p)$ sont indépendantes alors $X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1 + n_2, p)$.

Proposition : Stabilité de la loi de Poisson

Si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$ sont indépendantes alors $X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.

2.3 Loi du minimum et du maximum

Méthode : Loi du max

On pose $Z = \max(X, Y)$. Si X et Y deux v.a.r.d **indépendantes**, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z \leqslant x) &= \mathbb{P}([X \leqslant x] \cap [Y \leqslant y])\\ &\quad \text{(car le maximum est inférieur à } x \text{ si et seulement si } X \text{ et } Y \text{ sont inférieurs à } x\text{)}\\ &= \mathbb{P}(X \leqslant x)\mathbb{P}(Y \leqslant y)\\ &\quad \text{(par indépendance)}\end{aligned}$$

Méthode : Loi du min

On procède de même en passant par l'événement contraire $[Z > x]$.

Exemple : Maximum de deux lois $\mathcal{B}(p)$ puis $\mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$.

3 Covariance et coefficient de corrélation linéaire

3.1 Covariance

Définition

Soit (X, Y) un couple de v.a.r.d. On appelle **covariance de** X **et** Y, le réel :

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E\left((X - E(X))(Y - E(Y))\right)$$

lorsqu'il existe.

Propriétés :

- Si X et Y admettent toutes deux un moment d'ordre 2, elles admettent une variance. *(à savoir démontrer pour Maths II)*
- **Formule de Kœnig-Huygens :** si X et Y admettent des moments d'ordres 2, alors $\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.
- En conséquence, si X et Y sont indépendantes, alors $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$.
  La réciproque est fausse !
- **Symétrie :** $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}(Y,X)$.
- $\mathrm{Cov}(X,X) = V(X)$.
- **Linéarité à gauche :** $\mathrm{Cov}(a_1X_1 + a_2X_2, Y) = a_1\mathrm{Cov}(X_1,Y) + a_2\mathrm{Cov}(X_2,Y)$.
- **Linéarité à droite :** $\mathrm{Cov}(X, a_1Y_1 + a_2Y_2) = a_1\mathrm{Cov}(X,Y_1) + a_2\mathrm{Cov}(X,Y_2)$.
- Si A est presque-certaine, alors $\mathrm{Cov}(X,A) = 0$.

Proposition

Si X et Y admettent une variance, alors $X + Y$ aussi et :

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2\mathrm{Cov}(X,Y).$$

Remarque : Si X et Y sont indépendantes, alors $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$.

Corollaire

$$|\mathrm{Cov}(X,Y)| \leqslant \sigma(X)\sigma(Y).$$

3.2 Coefficient de corrélation linéaire

Définition

On appelle coefficient de corrélation linéaire de X et Y le réel :

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}.$$

Propriétés :

- $-1 \leqslant \rho(X,Y) \leqslant 1$.
- $|\rho(X,Y)| = 1$ ssi il existe $a \neq 0$ et b tels que $Y = aX + b$.
- a est du même signe que $\rho(X,Y)$.
- $\rho(X,Y) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Cov}(X,Y) = 0$. On dit que X et Y sont non-corrélées.