Chapitre 7 - Intégrales généralisées

1 Intégration sur un segment

1.1 Généralités

Théorème : Théorème fondamental de l'analyse

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue. Soit $a \in I$. L'application :

$$F : x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

est l'unique primitive de f s'annulant en a.

Remarque : Cela implique en particulier que :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a).$$

1.2 Primitives usuelles

Fonction $x \mapsto \dots$	Primitive $x \mapsto \dots$	Intervalle
x^α, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\ln(\lvert x\rvert)$	$\mathbb{R}_+^\star$ ou $\mathbb{R}_-^\star$
$\exp(x)$	$\exp(x)$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$
$\ln(x)$	$x\ln(x) - x$	$\mathbb{R}_+^\star$

Primitives à savoir reconnaître :

- $u'u^n$ si $n \in \mathbb{N}$;
- $u'u^\alpha$ si $\alpha \neq -1$ et $u > 0$;
- $u' \exp(u)$
- si u ne s'annule pas $\frac{u'}{u}$.

Exemple : Calculer $\int_2^{\mathrm{e}} \frac{1}{t\ln t}\mathrm{d}t$.

2 Intégrales impropres

2.1 Définition

Définition : Intégrale impropre en $+\infty$

Soit f une fonction continue sur $[a, +\infty[$ avec $a \in \mathbb{R}$.
Si $\lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ existe et est un nombre réel, on dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge et on note : $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.

Remarque : on définit de même les intégrales généralisées pour une fonction sur $]-\infty, a]$.
Exemple : Étudier $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\mathrm{d}t$.

Définition : Intégrale doublement généralisée

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On dit que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ est convergente s'il existe un $c \in \mathbb{R}$ tel que les deux intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^c f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_c^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ soient convergentes. Donc, ce cas, on pose :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^c f(t)\mathrm{d}t + \int_c^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t.$$

Remarque : Si l'intégrale est convergente, le choix de c n'a pas d'importance.
Exemple : Convergence et calcul de $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-|t|}\mathrm{d}t$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} t\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$.

2.2 Intégrales de référence et règles de calculs

Intégrales de référence :

- **Intégrales de Riemann :** $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ converge ssi $\alpha > 1$. Dans ce cas, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha-1}$.
- $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x$ converge ssi $\lambda > 0$. Dans ce cas, $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}$.
- **Utile pour plus tard :** $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}$.

Règles de calculs :

- **Linéarité :** une combinaison linéaire d'intégrales convergentes est convergente.
- **Positivité :** Si $f \geqslant 0$ et $a < b$, $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \geqslant 0$.
- **Théorème de l'intégrale nulle :** Si f est continue, positive et $a < b$, $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = 0 \Rightarrow f = 0$.
- **Croissance :** Si $f \geqslant g$ et $a < b$, $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \geqslant \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$.

3 Intégrales de fonctions positives

Attention ! les théorèmes qui suivent ont tous des hypothèses de positivité qu'il faudra rappeler lorsqu'on les utilise.

Théorème

Soient f et g deux fonctions positives au voisinage de $+\infty$.

- **Critère d'équivalence :** si $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} g(x)$ alors $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ et $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ sont de même nature.
- **Critère de comparaison :** si $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ (au voisinage de $+\infty$) alors la convergence $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ implique celle de $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ et la divergence de $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ implique celle de $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$.
- **Critère de négligeabilité :** si $f(x) = \underset{x\to+\infty}{\mathrm{o}}(g(x))$ alors la convergence de $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ implique celle de $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$.

Exemples : Convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{x^2+\mathrm{e}^{-x}}{x^4+x}\mathrm{d}x$, $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^2}\mathrm{d}t$?

4 Convergence absolue

Définition

Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ avec $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$. Si $\int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t$ est convergente, on dit que $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est absolument convergente.

Remarque : Si f est une fonction positive, être convergente est équivalent à être absolument convergente. Cela justifie *a posteriori* l'étude des fonctions positives précédentes.

Proposition

Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ continue. Si $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est absolument convergente alors elle est convergente. De plus, dans ce cas, on a :

$$\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| \le \int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t.$$

Exemple : Convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2}\mathrm{d}t$?

5 IPP et changements de variables

5.1 Intégration par parties

Proposition

Soient f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$. Alors :

$$\int_a^b f'(t)g(t)\mathrm{d}t = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)\mathrm{d}t.$$

Remarque : Le théorème concerne un **segment**. Pour les intégrales impropres, on travaillera donc d'abord sur un segment puis on prendra la limite.
Exemple : $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\sin(t)\mathrm{d}t$.

5.2 Changement de variable

Proposition

Soit f une fonction continue sur $[\alpha, \beta]$ et soit φ une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ et telle que $\varphi(a) = \alpha$ et $\varphi(b) = \beta$.
Alors les intégrales $\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x$ et $\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$ sont égales.

Remarque : Le théorème concerne un **segment**. Pour les intégrales impropres, on travaillera donc d'abord sur un segment puis on prendra la limite.
Exemple : $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}}\mathrm{d}t$ avec $x = \mathrm{e}^t$.

5.3 Parité et imparité

En appliquant le changement de variable $u = -t$, on peut montrer le résultat suivant :

Proposition

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

- Si f est paire, alors $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ converge ssi $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ converge. Dans ce cas, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$
- Si f est impaire, alors $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ converge ssi $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ converge. Dans ce cas $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 0$.

6 Compléments : maths approfondies

6.1 Intégrales généralisées sur un intervalle quelconque

Définition

Soit f une fonction continue sur $[a,b[$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
Si $\lim_{x\to b^-} \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ existe et est un nombre réel, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge et on note :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to b^-} \int_a^x f(t)\mathrm{d}t.$$

Exemples :

- avec $f(t) = \frac{1}{t^2}$ de 1 à $+\infty$.
- avec $g(t) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ de 0 à 1.

Remarques :

- **Attention danger !** Contrairement aux séries, la notation des intégrales généralisées, à part pour une borne à l'infini, ne montre pas explicitement que l'on travaille avec une limite.
- Cette notation ambiguë reflète aussi le fait que parfois une intégrale impropre est une intégrale sur un segment déguisé. Si f se prolonge sur $[a,b]$ par continuité en $\tilde{f}$ alors on a :

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = \int_a^x \tilde{f}(t)\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to b]{} \int_a^b \tilde{f}(t)\mathrm{d}t.$$

  Donc $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ existe et vaut $\int_a^b \tilde{f}(t)\mathrm{d}t$.
  On parle parfois d'intégrale faussement impropre.
  Exemple : $\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}\mathrm{d}x$.

Théorème : Intégrales de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors :

- $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ et dans ce cas :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1};$$

- $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$ et dans ce cas :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}.$$

6.2 Changement de variable

Proposition

Soit f une fonction continue sur $]\alpha,\beta[$ avec $\alpha,\beta \in \overline{\mathbb{R}}$ et soit φ une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $]a,b[$, **strictement monotone** et telle que $\varphi(t) \xrightarrow[t\to a^+]{} \alpha$ et $\varphi(t) \xrightarrow[t\to b^-]{} \beta$.

Alors les intégrales $\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x$ et $\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$ sont de même nature et, en cas de convergence, sont égales.

Remarque : Le théorème affirme que les deux intégrales sont de même nature. Il suffit donc d'étudier la convergence de l'une des deux uniquement.

6.3 Fonction Γ

Proposition

Soit $x \in \mathbb{R}_+^\star$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ est convergente.

Définition

Pour $x \in \mathbb{R}_+^\star$, on pose :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t.$$

Proposition

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$, on a :

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

Corollaire

On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$.

Remarque : La fonction Γ est donc le prolongement de la factorielle aux réels.