

# TD1 - SUITES ET SÉRIES

## 1 Suites

### Exercice 1

★

Soit  $(u_n)_{n \geq 1}$  une suite telle que  $u_1 > 0$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_{n+1} = u_n \left(1 - \frac{1}{2n!}\right)$ .

1. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n > 0$ .
2. En déduire que  $(u_n)$  est convergente.

### Exercice 2

★

Déterminer les limites des suites suivantes :

$$u_n = \frac{n+1}{\sqrt{n^3 - 2n + 1}}, \quad v_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n} \text{ avec } 0 \leq a < b,$$

$$w_n = \frac{n^2(\ln(n+1) - \ln(n))}{\sqrt{n^2 + 1}}.$$

### Exercice 3

★★

Déterminer les limites des suites suivantes :

$$u_n = \frac{2^n + (-1)^n}{3n + (-1)^{n+1}}, \quad v_n = \frac{n \sin n}{1 + n^2}, \quad w_n = \sqrt[n]{n},$$

$$x_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n+2}, \quad y_n = n^2 \left(\cos \frac{1}{n} - \cos \frac{1}{n+1}\right),$$

$$z_n = \left(\cos \frac{1}{n}\right)^{n^2}, \quad t_n = \frac{3n^2 + (-1)^n}{\sqrt{n^2 + 2} + \ln(n)}.$$

### Exercice 4

★★

Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Déterminer un équivalent, lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  de  $\binom{n}{k}$ .

### Exercice 5

★★

On définit la suite  $(u_n)$  par  $u_0 = 1$  et :

$$u_{n+1} = 1 + \frac{u_n}{n+1}.$$

1. Montrer que pour tout entier  $n$ ,  $1 \leq u_n \leq 2$ .
2. En déduire que  $u_n$  tend vers 1 lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

### Exercice 6

★★

On pose :

$$\begin{cases} u_0 = 2, \\ u_1 = 0, \\ u_2 = 7, \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 3u_{n+1} - 2u_n. \end{cases}$$

On note :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

et on pose pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}.$$

1. Pour tout entier naturel  $n$ , que vaut le produit  $MX_n$ ? En déduire  $X_n$  en fonction de  $M$  et  $X_0$ .
2. Montrer que pour tout entier naturel  $n$ , la première ligne de  $M^n$  est :

$$\left(\frac{1}{9}((-2)^n - 6n + 8) \quad \frac{1}{9}((-2)^{n+1} + 3n + 2) \quad \frac{1}{9}((-2)^n + 3n - 1)\right).$$

3. En déduire pour tout  $n$  entier naturel, l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .

### Exercice 7

★★

Soit  $(u_n)$  une suite définie par  $u_1 > 0$  et pour tout  $n$  entier naturel non nul,  $u_{n+1} = \sum_{k=1}^n \frac{u_k}{k}$ .

1. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n \geq u_1$ .
2. En déduire que pour tout  $n \geq 2$ ,  $u_n \geq \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\right) u_1$ .
3. Déterminer la limite de  $(u_n)$ .

### Exercice 8

★★★

Déterminer un équivalent simple des suites suivantes :

$$u_n = \exp\left(\frac{1 - \sqrt{n}}{1 + n}\right) - 1, \quad v_n = \sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^3 - n}$$

$$w_n = \sin\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{n}{2n}\right)\right).$$

**Exercice 9**

\*\*\*

Soit  $(u_n)$  une suite à termes positifs vérifiant que :  
 $u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(\sqrt{n})$ . On pose alors :

$$v_n = \left(1 + \frac{u_n}{n}\right)^n e^{-u_n}.$$

Déterminer un équivalent de  $\ln(v_n)$  puis en déduire la limite de  $(v_n)$ .

**Exercice 10**

\*\*\*

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par  $f(x) = x + \ln(x)$ .

1. Prouver que  $f$  est une bijection strictement croissante de  $]0, +\infty[$  sur  $\mathbb{R}$ .
2. (a) Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ , montrer que l'équation  $x + \ln x = n$  admet une unique solution que l'on notera  $x_n$ .  
 (b) Calculer  $x_1$ . Étudier la monotonie et la convergence de  $(x_n)$ .
3. (a) Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ , comparer  $f(n)$  et  $n$ . En déduire que  $x_n \leq n$ .  
 (b) Montrer que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ ,  $n - \ln n \leq x_n$ .  
 (c) Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{n}$ .

**2 Séries****Exercice 11**

\*

Déterminer si les séries suivantes sont convergentes et le cas échéant, calculer leurs sommes :

$$A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^{2n+1}}{n!}, \quad B = \sum_{n=0}^{+\infty} n 2^{n-1}, \quad C = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!},$$

$$D = \sum_{n=0}^{+\infty} n \frac{3^n}{4^{n+1}} \quad \text{et} \quad E = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{2^{n+1}}.$$

**Exercice 12**

\*\*

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $u_n = \frac{n}{(n+1)!}$ .

1. Montrer que la série  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$  converge.
2. Déterminer deux réels  $a$  et  $b$  tels que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$u_n = \frac{a}{n!} + \frac{b}{(n+1)!}$$

et en déduire la valeur de  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ .

3. Montrer que la série de terme général  $(n^2 - 1)u_n$  converge et calculer sa somme.

**Exercice 13**

\*\*

Déterminer la nature des séries suivantes :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3 + 2n}{n^4 + n^3 + 1}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (n+2)}{n^3 + 1},$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\ln n}{n}\right)^2, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{n\sqrt{n}}\right)^{n\sqrt{n}},$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(2 - e^{1/n}).$$

**Exercice 14 - Série-intégrale**

\*\*

On s'intéresse à la nature de la série de terme général  $\frac{1}{k \ln k}$  pour  $k \geq 2$ .

1. Montrer que pour tout  $k \geq 2$  :

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t \ln t} dt \leq \frac{1}{k \ln k}.$$

2. En déduire que pour tout  $n \geq 2$  :

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k} \geq \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2)).$$

3. Conclure.
4. Montrer que :

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(\ln(n)).$$

**Exercice 15 - Une série alternée**

\*\*

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ . On pose  $S_n$  la somme partielle de la série de terme général  $u_n$ .

1. La série de terme général  $u_n$  est-elle absolument convergente ?
2. Montrer que les suites  $(S_{2n})_{n \geq 1}$  et  $(S_{2n+1})_{n \geq 0}$  sont adjacentes.
3. En déduire que  $\sum u_n$  converge.

**Exercice 16**

\*\*

Pour  $n \geq 1$ , on pose  $u_n = \frac{(-1)^{n+1} n}{4n^2 - 1}$ .

1. Déterminer deux réels  $a$  et  $b$  tels que pour tout  $k \geq 1$  :

$$\frac{k}{4k^2 - 1} = \frac{a}{2k + 1} + \frac{b}{2k - 1}.$$

2. En déduire que la série de terme général  $u_n$  converge et calculer sa somme.

**Exercice 17** \*\*

Pour tout entier  $k \geq 1$ , on pose  $u_k = \ln\left(1 + \frac{2}{k(k+3)}\right)$ .

1. Montrer que la série de terme général  $u_k$  converge.
2. En factorisant  $k(k+3)+2$ , déterminer une suite  $(v_k)_{k \geq 1}$  telle que  $u_k = v_{k+1} - v_k$ .
3. En déduire la valeur de la série des  $u_k$ .

**Exercice 18** \*\*\*

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Déterminer la nature des séries suivantes en fonction de  $\alpha$  :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \exp(-\ln(n)^\alpha) \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{e^{n^\alpha} - 1}.$$

**Exercice 19 - Constante d'Euler** \*\*\*

Pour  $n \geq 2$ , on pose :

$$u_n = \frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n-1}{n}\right).$$

1. Montrer que la série de terme général  $u_n$  converge, puis déterminer les sommes partielles de cette série.
2. En déduire qu'il existe une constante  $\gamma$  telle que :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o_{n \rightarrow +\infty}(1).$$

Donner un équivalent de  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ .

**Exercice 20 - Séries alternées** \*\*\*

Soit  $(u_n)$  une suite de réels positifs. On suppose que la suite  $(u_n)$  est décroissante et converge vers 0. On souhaite montrer que la série  $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n$  converge.

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on note :

$$S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k u_k$$

la somme partielle de la série.

1. Montrer que les suites  $(S_{2n})$  et  $(S_{2n+1})$  sont adjacentes.
2. En déduire que la série  $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n$  converge.

3. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on note :

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k$$

le reste de la série. En considérant séparément le cas  $n$  pair et le cas  $n$  impair, montrer que pour tout  $n$  entier naturel :

$$0 \leq |R_n| \leq u_{n+1}.$$

**Exercice 21 - Formule de Stirling** \*\*\*

On veut montrer qu'il existe  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$  tel que  $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \alpha \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ . Pour cela, on pose :

$$u_n = \frac{\sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n}{n!} \quad \text{et} \quad v_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$$

1. Montrer que  $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{12n^2}$ .
2. En déduire que la série des  $v_n$  converge. Que peut-on en déduire sur la suite  $(u_n)$  ?
3. Conclure.

**3 Séries doubles**

**Exercice 22** \*\*

La série double  $\sum_{n \geq 1, m \geq 0} \frac{(-1)^{n+m} 2^m}{n \times m!}$  converge-t-elle ?

**Exercice 23** \*\*\*

Les séries doubles suivantes convergent-elles ? Si oui, calculer leurs sommes.

$$\sum_{m \geq 0, n \geq 0} \frac{1}{2^{m+n} m!}, \quad \sum_{m \geq 0, n \geq 0} \frac{(-1)^m n^m}{m!},$$

$$\sum_{m \geq 1, n \geq 0} \frac{n+m-1}{2^{m+n-2}}.$$

**Exercice 24** \*\*\*

Pour quelles valeurs de  $\alpha$  la série double  $\sum_{m \geq 1, n \geq 1} \frac{1}{(m+n)^\alpha}$  converge-t-elle ?

## 4 Exercices de concours

**Exercice 25 - QSP HEC 2008** ★★★

Réprésenter dans le plan l'ensemble des points de coordonnées  $(a, b)$  tels que  $a > 0$ ,  $b > 0$  et la série de terme général :

$$u_n = \frac{a^n}{1 + b^n}$$

soit convergente.

**Exercice 26 - Oral ESCP 2018** ★★★

On considère une suite  $(u_n)$  définie par :

$$\begin{cases} u_0 > 0, \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n^2}{n+1}. \end{cases}$$

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $v_n = \frac{\ln(u_n)}{2^n}$ .

- Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $v_n$  est bien définie.
- (a) Montrer que la série de terme général  $\frac{\ln k}{2^k}$  converge.  
(b) On pose donc :

$$\sigma = - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln k}{2^k}.$$

Montrer que la suite  $(v_n)$  converge. Exprimer sa limite en fonction de  $u_0$  et de  $\sigma$ .

- On suppose dans cette question que  $u_0 \neq e^{-\sigma}$ . Étudier le comportement de  $(u_n)$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .
- On suppose dans cette question que  $u_0 = e^{-\sigma}$ .  
(a) Vérifier que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$v_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln k}{2^k}.$$

- En déduire, si elle existe, la limite de la suite  $(u_n)$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

**Exercice 27 - QSP HEC 2014** ★★★

Pour tout entier  $n \geq 1$ , on pose :

$$u_n = \ln(n) + a \ln(n+1) + b \ln(n+2).$$

- Déterminer les réels  $a$  et  $b$  tels que la série de terme général  $u_n$  soit convergente.
- Calculer la somme de cette série.

**Exercice 28 - QSP ESCP 2006** ★★★★★

- Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , il existe un unique  $y_n \in \mathbb{R}_+^*$  tel que  $\ln(y_n) + y_n = \frac{1}{n}$ .
- Montrer que la suite  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge et si on note  $\ell$  sa limite, déterminer un équivalent de  $y_n - \ell$ .

**Exercice 29 - Oral HEC 2012** ★★★★★

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite réelle définie par  $u_0 = 1$  et pour tout  $n$  entier :

$$u_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+5} u_n.$$

- Écrire une fonction Python ayant pour argument un entier  $n$  et renvoyant  $\sum_{k=0}^n u_k$ .
- Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . On pose pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$v_n = \frac{(n+1)^\alpha u_{n+1}}{n^\alpha u_n}.$$

- Rappeler le développement limité à l'ordre deux au voisinage de 0 de  $x \mapsto \ln(1+x)$ .
- Montrer que :

$$\ln v_n = (\alpha + 1) \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) - \ln \left( 1 + \frac{5}{2n} \right).$$

Pour quelle valeur  $\alpha_0$  du réel  $\alpha$  la série de terme général  $\ln v_n$  est-elle convergente ?

On considérera désormais le cas  $\alpha = \alpha_0$ .

- Expliciter  $\sum_{k=1}^n \ln(v_k)$  et en déduire qu'il existe un réel strictement positif  $C$  tel que :

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{C}{n^{\alpha_0}}.$$

Qu'en déduit-on pour la série  $\sum u_n$  ?

- Justifier l'existence d'un réel strictement positif  $D$  (indépendant de  $n$ ) tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\sum_{k=0}^n k u_k \leq D \sqrt{n}.$$

- (a) Établir pour tout entier naturel  $n$ , la relation :

$$2 \sum_{k=1}^{n+1} k u_k + 3 \sum_{k=1}^{n+1} u_k = 2 \sum_{k=0}^n k u_k + 2 \sum_{k=0}^n u_k.$$

- En déduire la valeur de  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ .