TD1 - Suites et séries - Correction

1 Suites

Exercice 1 ⋆

1. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $u_n > 0$.
   On note pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$:
   $$H_n \ : \ « \, u_n > 0 \, ».$$
   - **Initialisation :** Pour $n = 1$, on a bien $u_1 > 0$ par hypothèse, donc H_1 est vérifiée.
   - **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On suppose H_n vraie. Montrons H_{n+1}.
     Comme $n \geqslant 1$, $n! \geqslant 1$ et donc :
     $$1 - \frac{1}{2n!} \geqslant \frac{1}{2} > 0.$$
     D'après l'hypothèse de récurrence, $u_n > 0$. Et donc :
     $$u_{n+1} = \underbrace{u_n}_{>0} \times \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2n!}\right)}_{>0} > 0.$$
     Donc H_{n+1} est bien vérifiée.

   $\boxed{\text{Ainsi, pour tout } n \in \mathbb{N}^\star,\ u_n > 0.}$
2. La suite (u_n) est donc minorée (par 0). Si on peut montrer que (u_n) est décroissante, d'après le théorème de la limite monotone, on aura (u_n) convergente.
   Or, comme $n \geqslant 1$, on a :
   $$0 < 1 - \frac{1}{2n!} < 1.$$
   Or, (u_n) étant strictement positive, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{1}{2n!}$. Donc (u_n) est bien décroissante.
   $\boxed{\text{Et ainsi } (u_n) \text{ converge.}}$

Exercice 2 ⋆

1. On a : $n+1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ et $\sqrt{n^3 - 2n + 1} \underset{n\to+\infty}{\sim} n^{\frac{3}{2}}$. Donc, par quotient d'équivalents :
   $$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$
   Comme $\frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on a également :
   $$\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.}$$
2. On a :
   $$a^n - b^n = b^n \left(\left(\frac{a}{b}\right)^n - 1\right).$$
   Comme $0 \leqslant a < b$, on a $\left(\frac{a}{b}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Et donc :
   $$a^n - b^n \underset{n\to+\infty}{\sim} -b^n.$$
   De même :
   $$a^n + b^n \underset{n\to+\infty}{\sim} b^n.$$
   Et donc :
   $$\boxed{v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-b^n}{b^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1.}$$

3. On a :

$$\ln(n+1) - \ln(n) = \ln\Big(1 + \underbrace{\frac{1}{n}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}0}\Big) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

Puisque, $\sqrt{n^2+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} n$, on a donc :

$$w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^2 \times \frac{1}{n}}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1.$$

Et ainsi :

$$\boxed{w_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.}$$

Exercice 3 ⋆⋆

Attention ! *Correction rapide. Ce n'est pas un modèle de rédaction.*

1. On a $(-1)^n = \underset{n\to+\infty}{o}(2^n)$ donc $2^n + (-1)^n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2^n$. De même, $3n + (-1)^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} 3n$. Donc $u_n \sim \frac{2^n}{3n}$. Par croissance comparée, $\boxed{u_n \to +\infty.}$
2. $-1 \leqslant \sin n \leqslant 1$ Donc : $-\frac{n}{1+n^2} \leqslant v_n \leqslant \frac{n}{1+n^2}$. Donc $\boxed{v_n \to 0.}$
3. $w_n = \sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\frac{\ln n}{n}\right)$. Par croissance comparée, $\frac{\ln n}{n} \to 0$ donc $\boxed{w_n \to 1.}$
4. $x_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n+2} = \exp\left((n+2)\ln\frac{n-1}{n+1}\right) = \exp\left((n+2)\ln\left[1 - \frac{2}{n+1}\right]\right)$. Or $(n+2)\ln\left[1 - \frac{2}{n+1}\right] \sim -\frac{2(n+2)}{n+1} \to -2$. Donc $\boxed{x_n \to \mathrm{e}^{-2}.}$
5. $\cos\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$. Comme $\frac{1}{2(n+1)^2} = \frac{1}{2n^2(1-1/n)^2} = \frac{1}{2n^2}\left(1 + \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$, on a : $\cos\frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$. Donc : $\cos\frac{1}{n} - \cos\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$. Puis $\boxed{y_n \sim n^2 \times \frac{1}{n^3} \to 0.}$
6. $z_n = \left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^2} = \exp\left(n^2 \ln\cos\frac{1}{n}\right)$. Comme $\cos\frac{1}{n} \to 1$, $\ln\cos\frac{1}{n} \sim \cos\frac{1}{n} - 1 \sim -\frac{1}{2n^2}$. Donc $n^2\ln\cos\frac{1}{n} \sim -\frac{1}{2}$ et $\boxed{z_n \to \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}.}$
7. $(-1)^n = o(3n^2)$ donc $3n^2 + (-1)^n \sim 3n^2$. $\sqrt{n^2+2} \sim n$ or $\ln(n) = o(n)$. Donc $\sqrt{n^2+2} + \ln(n) \sim n$. D'où $\boxed{t_n \sim \frac{3n^2}{n} \sim 3n \to +\infty.}$

Exercice 4 ⋆⋆

Avec $k \in \mathbb{N}$ fixé, lorsque $n \to +\infty$, pour n suffisamment grand, on a $n \geqslant k$. On a donc, pour n suffisamment grand :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Remarquons que cela peut s'écrire :

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\times\cdots\times(n-k+1)}{k!}.$$

Le terme du dénominateur est une constante. Le terme du numérateur est un polynôme en n de degré k. Il est donc équivalent à son terme de plus haut degré lorsque $n \to +\infty$.
Ainsi :

$$\boxed{\binom{n}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}.}$$

Exercice 5 ⋆⋆

1. On procède par récurrence.
   - **Initialisation :** pour $n = 0$, on a $u_0 = 1$ qui est bien compris entre 1 et 2.
   - **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $1 \leqslant u_n \leqslant 2$. Montrons que $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$.
   Comme $u_n \geqslant 2$, on a : $\frac{u_n}{n+1} \geqslant 0$. D'où :

$$\boxed{u_{n+1} = 1 + \underbrace{\frac{u_n}{n+1}}_{\geqslant 0} \geqslant 1.}$$

   Pour la seconde inégalité, distinguons deux cas :
   (a) $n > 0$. Si $n > 0$, on a $n \geqslant 1$ et donc $n + 1 \geqslant 2 \geqslant u_n$. Donc :

$$\frac{u_n}{n+1} \leqslant 1.$$

   Et donc, $\boxed{\text{on a bien } u_{n+1} \leqslant 2.}$
   (b) $n = 0$. L'argument précédent ne marche pas si $n = 0$ mais il suffit de vérifier ce cas à la main. On a :

$$u_1 = 1 + \frac{u_0}{0+1} = 1 + \frac{1}{1} = 2$$

   qui $\boxed{\text{est bien entre 1 et 2.}}$
   Donc, la propriété est bien héréditaire.

2. (u_n) est donc bornée. Ainsi :

$$\frac{u_n}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

   Et donc :

$$\boxed{u_{n+1} = 1 + \underbrace{\frac{u_n}{n+1}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.}$$

   Les limites de (u_n) et de (u_{n+1}) sont les mêmes donc $\boxed{(u_n) \text{ converge bien vers } 1.}$

Exercice 6 ⋆⋆

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} MX_n &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ -2u_n + 3u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ u_{n+3} \end{pmatrix} \boxed{= X_{n+1}.} \end{aligned}$$

   On en déduit par une récurrence immédiate : $\boxed{X_n = M^n X_0.}$

2. Réfléchissons avant de nous lancer. On veut calculer la **première ligne** de M^n. *A priori*, on va procéder par récurrence (on va calculer M^{n+1} à partir de M^n). Il faudrait donc un moyen de calculer la première ligne de M^{n+1} en connaissant uniquement la première de M^n.
   On peut penser à deux méthodes : soit on calcule $M^{n+1} = M \times M^n$, soit on calcule $M^{n+1} = M^n \times M$. Dans le premier cas, il va falloir connaître la première ligne de M et toutes les colonnes de M^n. Dans le second, en revanche, on va avoir besoin de la première ligne de M^n et des colonnes de M. La deuxième méthode semble meilleure.

- **Initialisation :** pour $n=0$, on a $M^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Donc la première ligne est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

  Calculons par ailleurs :

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \frac{1}{9}((-2)^n - 6n + 8) & \frac{1}{9}((-2)^{n+1} + 3n + 2) & \frac{1}{9}((-2)^n + 3n - 1) \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} \frac{1}{9}((-2)^0 - 6\times 0 + 8) & \frac{1}{9}((-2)^{0+1} + 3\times 0 + 2) & \frac{1}{9}((-2)^0 + 3\times 0 - 1) \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

  Donc la première ligne de M^0 est bien donnée par l'expression de l'énoncé.
- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que la première ligne de M^n est donnée par :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{9}((-2)^n - 6n + 8) & \frac{1}{9}((-2)^{n+1} + 3n + 2) & \frac{1}{9}((-2)^n + 3n - 1) \end{pmatrix}.$$

  Montrons que la même expression est valable pour la première ligne de M^{n+1}.
  Pour cela remarquons que la première ligne de M^{n+1} est la première ligne du produit $M^n \times M$. Or cette ligne est donnée par :

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \frac{1}{9}((-2)^n - 6n + 8) & \frac{1}{9}((-2)^{n+1} + 3n + 2) & \frac{1}{9}((-2)^n + 3n - 1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} \frac{-2}{9}((-2)^n + 3n - 1) & \frac{1}{9}((-2)^n - 6n + 8) + \frac{3}{9}((-2)^n + 3n - 1) & \frac{1}{9}((-2)^{n+1} + 3n + 2) \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} \frac{1}{9}((-2)^{n+1} + \underbrace{(-2)(3n-1)}_{=-6n+2}) & \frac{1}{9}(\underbrace{4}_{=(-2)^2} \times (-2)^n \underbrace{-6n + 9n + 8 - 3}_{=3n+5}) & \frac{1}{9}((-2)^{n+1} + 3n + 2) \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} \frac{1}{9}((-2)^{n+1} - 6(n+1) + 8) & \frac{1}{9}((-2)^{(n+1)+1} + 3(n+1) + 2) & \frac{1}{9}((-2)^{n+1} + 3(n+1) - 1) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

  Donc la propriété est bien héréditaire.

3. On remarque que u_n est donnée par la première ligne de X_n. Et X_n est donnée par la première ligne de $M^n X_0$. Donc :

$$\begin{aligned} u_n &= \begin{pmatrix} \frac{1}{9}((-2)^n - 6n + 8) & \frac{1}{9}((-2)^{n+1} + 3n + 2) & \frac{1}{9}((-2)^n + 3n - 1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{2}{9}((-2)^n - 6n + 8) + 0 \times \frac{1}{9}((-2)^{n+1} + 3n + 2) + \frac{7}{9}((-2)^n + 3n - 1) \\ &= (-2)^n + \frac{-12+21}{9} n + \frac{16-7}{9} \boxed{= (-2)^n + n + 1.} \end{aligned}$$

Attention, on a ici identifié les matrices 1×1 et les réels.

Exercice 7 ⋆⋆

1. Procédons par récurrence forte.

   - **Initialisation :** Pour $n = 1$, on a bien $\boxed{u_1 \geqslant u_1.}$
   - **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On suppose que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $u_k \geqslant u_1$. Montrons que $u_{n+1} \geqslant u_1$.
     Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Comme $u_k \geqslant u_1$ et comme $u_1 > 0$, on a $u_k > 0$. Donc :

$$\boxed{u_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{u_i}{i} = u_1 + \sum_{i=2}^{n} \underbrace{\frac{u_i}{i}}_{>0} > u_1.}$$

   La propriété est donc vérifié (au sens large pour u_1, strictement à partir de u_2).

2. Soit $n \geqslant 2$. On a :

$$\boxed{u_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\overbrace{u_k}^{\geqslant u_1}}{k} \geqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{u_1}{k} \geqslant \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\right) u_1.}$$

3. On a :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = +\infty.$$

puisque c'est la somme partielle de la série harmonique.
Comme $u_1 > 0$, on a donc :

$$\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.}$$

Exercice 8 ⋆⋆⋆

Attention ! *Correction rapide. Ce n'est pas un modèle de rédaction.*

1. On a $1-\sqrt{n} \sim \sqrt{n}$ et $1+n \sim n$. Donc $\frac{1-\sqrt{n}}{1+n} \sim -\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$. Or $\exp(z_n) - 1 \sim z_n$ si $z_n \to 0$. Donc $\boxed{u_n \sim -\frac{1}{z_n}.}$
2. On a $\sqrt{n^2-1} \sim n$ et $\sqrt{n^3-n} \sim n^{3/2}$. Or $n = o(n^{3/2})$. Donc $\boxed{v_n \sim -n^{3/2}.}$
3. On a $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{n}{2^n}\right) = \sin\frac{n}{2^n}$. Par croissance comparée, $\frac{n}{2^n} \to 0$, donc $\sin\frac{n}{2^n} \sim \frac{n}{2^n} \to 0$ et donc $\boxed{w_n \sim \frac{n}{2^n}.}$

Exercice 9 ⋆⋆⋆

On a :

$$\ln(v_n) = n\ln\left(1 + \frac{u_n}{n}\right) - u_n.$$

Comme $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(\sqrt{n})$, on a $\frac{u_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Donc :

$$n\ln\left(1+\frac{u_n}{n}\right) = n\left(\frac{u_n}{n} - \frac{1}{2}\left[\frac{u_n}{n}\right]^2 + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\left[\frac{u_n}{n}\right]^2\right)\right) = u_n - \frac{u_n^2}{2n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{u_n^2}{n}\right).$$

D'où :

$$\boxed{\ln(v_n) \sim -\frac{u_n^2}{2n}.}$$

Comme $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(\sqrt{n})$, on a :

$$\ln(v_n) = \underset{n\to+\infty}{o}\left(-\frac{1}{2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Ainsi :

$$\boxed{v_n = \exp(\underbrace{\ln(v_n)}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.}$$

Exercice 10 ⋆⋆⋆

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ comme somme de fonctions dérivables. On a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$:

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0.$$

Donc $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur son domaine.}}$
De plus :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty.$$

et :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(1+\underbrace{\frac{\ln(x)}{x}}_{\to 0}\right) = +\infty.$$

Avec ces limites, comme f est continue et strictement monotone, d'après le théorème de la bijection, $\boxed{f \text{ est une bijection de } \mathbb{R}_+^\star \text{ dans } \mathbb{R}.}$

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On a donc $n \in \mathbb{R}$.

   Comme f est une bijection de $\mathbb{R}_+^\star$ dans $\mathbb{R}$, $\boxed{n \text{ admet un unique antécédent dans } \mathbb{R}_+^\star \text{ par } f}$ que l'on peut noter x_n.

   (b) On résout :

   $$x + \ln(x) = 1.$$

   On remarque que $x = 1$ est solution. Comme la solution est unique, on a : $\boxed{x_1 = 1.}$

   Remarquons que $x_n = f^{-1}(n)$. Or f est bijection strictement croissante. Donc f^{-1}, étant de même monotonie, est également strictement croissante. Ainsi $\boxed{x_{n+1} > x_n}$, c'est-à-dire $\boxed{(x_n) \text{ est strictement croissante.}}$

   De même, comme $x_n = f^{-1}(n)$, on peut calculer :

   $$\boxed{\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} f^{-1}(n) = +\infty.}$$

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculons :

   $$f(n) - n = n + \ln(n) - n = \ln(n).$$

   Comme $n \geqslant 1$, on a $\ln(n) \geqslant 0$ et donc $\boxed{f(n) \geqslant n.}$

   Procédons par équivalence :

   $$\begin{aligned} f(n) &\geqslant n \\ \Leftrightarrow f^{-1}(f(n)) &\geqslant f^{-1}(n) \text{ (car } f^{-1} \text{ est une bijection croissante)} \\ \Leftrightarrow n &\geqslant x_n. \end{aligned}$$

   (b) Procédons par équivalence. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On a :

   $$\begin{aligned} n - \ln n &\leqslant x_n \\ \Leftrightarrow f(n - \ln n) &\leqslant x_n \\ \Leftrightarrow n - \ln(n) + \ln(n - \ln(n)) &\leqslant n \\ \Leftrightarrow \ln(n - \ln(n)) &\leqslant \ln(n). \end{aligned}$$

   La dernière inégalité est vraie par croissance du logarithme et positivité de $\ln(n)$. Donc, on a bien : $\boxed{n - \ln(n) \leqslant x_n.}$

   (c) On a donc l'encadrement $n - \ln n \leqslant x_n \leqslant n$. En divisant par n, on obtient :

   $$1 - \underbrace{\frac{\ln n}{n}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0} \leqslant \frac{x_n}{n} \leqslant 1.$$

   Donc, d'après le théorème des gendarmes :

   $$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{n} = 1.}$$

   Dit autrement, $\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n.}$

2 Séries

Exercice 11 ⋆

Attention ! *Correction rapide. Ce n'est pas un modèle de rédaction.*

1. Sous réserve de convergence, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^{2n+1}}{n!} = 3\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(3^2)^n}{n!}$ qui est la série exponentielle. Donc la série converge et $\boxed{A = 3e^9.}$
2. Série géométrique dérivée mais de raison supérieure à 1. $n2^{n-1} \to +\infty$ donc $\boxed{\text{grossièrement divergente.}}$
3. $\boxed{C = e^{-1}.}$
4. Sous réserve de convergence, $D = \sum_{n=0}^{+\infty} n\frac{3^n}{4^{n+1}} = \frac{3}{16}\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$. Série géométrique dérivée de raison entre -1 et 1 (strictement). Donc $\boxed{D = \frac{3}{16} \times \frac{1}{\left(1-\frac{3}{4}\right)^2} = 3.}$
5. Sous réserve de convergence, $E = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{2^{n+1}} = \frac{1}{8}\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$ qui converge.
   Et donc $\boxed{E = \frac{1}{8} \times \frac{2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3} = 2.}$

Exercice 12 ⋆⋆

1. Pour $n \geqslant 1$, on a :
$$u_n = \frac{n}{(n+1)!} = \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{<1} \times \frac{1}{(n-1)!} < \frac{1}{(n-1)!}.$$
   Par comparaison de séries à termes positifs, $\boxed{\text{la série } \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \text{ converge.}}$
2. Calculons pour $a, b \in \mathbb{R}$:
$$\frac{a}{n!} + \frac{b}{(n+1)!} = \frac{a(n+1)+b}{(n+1)!}$$
   Donc si $a = 1$ et $b = -1$:
$$\boxed{\frac{1}{n!} + \frac{-1}{(n+1)!} = \frac{(n+1)-1}{(n+1)!} = \frac{n}{(n+1)!} = u_n.}$$
   On en déduit :
$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} u_n &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}\right)\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!} - \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)!}\\ &\quad \text{(car les deux sommes convergent)}\\ &= e + \sum_{n'=1}^{+\infty}\frac{1}{(n')!}\\ &= e + e - 1 \boxed{= 2e - 1.}\end{aligned}$$
3. On a :
$$(n^2-1)u_n = (n+1)(n-1)\frac{n}{(n+1)!} = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \text{ ou } n = 1\\ \frac{1}{(n-2)!} & \text{si } n \geqslant 2\end{cases}.$$
   Donc, la convergence est évidente et :
$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}(n^2-1)u_n = \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{(n-2)!} = \sum_{n'=0}^{\infty}\frac{1}{(n')!} = e.}$$

Exercice 13 ⋆⋆

Attention ! *Correction rapide. Ce n'est pas un modèle de rédaction.*

1. $\frac{n^3+2n}{n^4+n^3+1} \sim \frac{n^3}{n^4} \sim \frac{1}{n}$. Par équivalence de série à termes positifs, $\boxed{\text{la série } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3+2n}{n^4+n^3+1} \text{ diverge.}}$

2. $\left|\frac{(-1)^n(n+2)}{n^3+1}\right| = \frac{n+2}{n^3+1} \sim \frac{1}{n^2}$. Par équivalence de séries à termes positifs, la série des valeurs absolues converge et donc $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(n+2)}{n^3+1} \text{ converge absolument donc converge.}}$

3. $n^{\frac{3}{2}} \left(\frac{\ln n}{n}\right)^2 = \frac{(\ln n)^2}{\sqrt{n}} \to 0$ donc $\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2$ est négligeable devant $\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ qui est le terme général d'une série convergente. Par négligeabilité, $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\ln n}{n}\right)^2 \text{ converge absolument donc converge.}}$

4. $\left(1-\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)^{n\sqrt{n}} = \exp\left(n\sqrt{n}\ln\left[1-\frac{1}{n\sqrt{n}}\right]\right)$. Or $n\sqrt{n}\ln\left[1-\frac{1}{n\sqrt{n}}\right] = n\sqrt{n}\left[-\frac{1}{n\sqrt{n}} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\right] = -1 + \underset{n\to+\infty}{o}(1) \to -1$. Par composition avec une fonction continue, $\left(1-\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)^{n\sqrt{n}} \to \mathrm{e}^{-1} \neq 0$.
   Donc $\boxed{\text{la série diverge grossièrement.}}$

5. $n \times \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}} = n^{-\frac{1}{n}} = \exp\left(-\underbrace{\frac{\ln(n)}{n}}_{\to 0}\right) \to 1$. Donc $\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}} \sim \frac{1}{n}$ et donc par équivalence de séries à termes positifs,
   $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}} \text{ diverge.}}$

6. $\ln(2-\mathrm{e}^{1/n}) = \ln(1+\underbrace{(1-\mathrm{e}^{1/n})}_{\to 0}) \sim 1-\mathrm{e}^{1/n} \sim -\frac{1}{n}$. Par équivalence de séries à termes de signes constants,
   $\boxed{\text{la série } \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(2-\mathrm{e}^{1/n}) \text{ diverge.}}$

Exercice 14 - Série-intégrale ⋆⋆

1. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t\ln t}$ est décroissante. Donc pour $k \geqslant 2$ fixé, et pour tout $t \in [k, k+1]$, on a :
   $$\frac{1}{t\ln t} \leqslant \frac{1}{k\ln k}.$$
   Par croissance de l'intégrale, on obtient :
   $$\boxed{\int_k^{k+1} \frac{1}{t\ln t}\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{k\ln k}\mathrm{d}t = \frac{1}{k\ln k}.}$$

2. On somme l'inégalité précédente :
   $$\sum_{k=2}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{t\ln t}\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k}.$$
   Avec la relation de Chasles, on obtient :
   $$\sum_{k=2}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{t\ln t}\mathrm{d}t = \int_2^{n+1} \frac{1}{t\ln t}\mathrm{d}t.$$
   De plus, une primitive de $t \mapsto \frac{1}{t\ln t}$ est $t \mapsto \ln(\ln(t))$ (on reconnaît la forme $\frac{u'}{u}$ où u est la fonction logarithme). Donc :
   $$\int_2^{n+1} \frac{1}{t\ln t}\mathrm{d}t = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2)).$$
   Et ainsi, on a bien :
   $$\boxed{\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2)) \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k}.}$$

3. Comme :
$$\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$
par comparaison, la suite des sommes partielles $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k\ln k}$ tend vers $+\infty$. Donc $\boxed{\text{la série des } \frac{1}{k\ln k} \text{ diverge.}}$
4. Pour trouver un équivalent, il nous faudrait un encadrement. Comme précédemment, on montre :
$$\int_{k-1}^{k} \frac{1}{t\ln t}\mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{k\ln k}.$$
Puis :
$$\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k\ln k} \leqslant \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)).$$
On a commencé la somme à 3 pour éviter $\ln(\ln(1))$ *qui n'est pas défini*

On a donc l'encadrement :
$$\boxed{\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2)) \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k} \leqslant \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) + \frac{1}{2\ln(2)}.}$$
On divise tout par $\ln(\ln(n))$:
$$\frac{\ln(\ln(n+1))}{\ln(\ln(n))} - \underbrace{\frac{\ln(\ln(2))}{\ln(\ln(n))}}_{\to 0} \leqslant \frac{\sum_{k=2}^n \frac{1}{k\ln k}}{\ln(\ln(n))} \leqslant 1 + \underbrace{\frac{-\ln(\ln(2)) + \frac{1}{2\ln(2)}}{\ln(\ln(n))}}_{\to 0}.$$
Les termes de la forme $\frac{\text{constante}}{\ln(\ln(n))}$ tendent clairement vers 0. Il reste à traiter le terme suviant :
$$\begin{aligned}\frac{\ln(\ln(n+1))}{\ln(\ln(n))} &= \frac{\ln(\ln(n(1+1/n)))}{\ln(\ln(n))} = \frac{\ln(\ln(n)+\ln(1+1/n))}{\ln(\ln(n))}\\ &= \frac{\ln(\ln(n)(1+\ln(1+1/n)/\ln(n)))}{\ln(\ln(n))}\\ &= 1 + \frac{\ln(1+\ln(1+1/n)/\ln(n))}{\ln(\ln(n))}\end{aligned}$$
Ouf ! Comme on ne peut pas composer avec des équivalents, on cherche ici à factoriser systématiquement par le terme dominant et utiliser la propriété de morphisme du logarithme pour le faire sortir. On peut maintenant conclure.
On a $1+1/n \to 1$ donc $\ln(1+1/n) \to 0$. Donc :
$$\lim_{n\to+\infty} 1 + \ln(1+1/n)/\ln(n) = 1.$$
D'où :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(\ln(n+1))}{\ln(\ln(n))} = 1.$$
D'après le théorème des gendarmes, on a donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=2}^n \frac{1}{k\ln k}}{\ln(\ln(n))} = 1$ c'est-à-dire :
$$\boxed{\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(\ln(n)).}$$

Exercice 15 - Une série alternée ⋆⋆

1. **Non** (critère de Riemann).
2. Montrons que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes :

- **Décroissance de** (S_{2n}) **:** Soit $n \geqslant 1$. On a :

$$\begin{aligned} S_{2(n+1)} - S_{2n} &= \sum_{k=1}^{2(n+1)} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \\ &= \frac{(-1)^{2n+2}}{\sqrt{2n+2}} + \frac{(-1)^{2n+1}}{\sqrt{2n+1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2n+2}} - \frac{1}{\sqrt{2n+1}} < 0. \end{aligned}$$

  Donc $\boxed{(S_{2n}) \text{ est (strictement) décroissante.}}$

- **Croissance de** (S_{2n+1}) **:** Soit $n \geqslant 1$. De manière similaire, on a :

$$S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} = -\frac{1}{\sqrt{2n+3}} + \frac{1}{\sqrt{2n+2}} > 0.$$

  Donc $\boxed{(S_{2n+1}) \text{ est (strictement) croissante.}}$

- **Limite de** $S_{2n} - S_{2n+1}$ **:** On a :

$$\boxed{S_{2n} - S_{2n+1} = -\frac{(-1)^{2n+1}}{\sqrt{2n+1}} = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.}$$

Les suites sont donc bien adjacentes.

3. Comme (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes, elles ont une limite réelle commune. Comme, de plus, il s'agit des termes pairs et impairs de la suite des sommes partielles, la suite des sommes partielles a, à son tour, cette même limite.
Donc $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \text{ converge.}}$

Exercice 16 ⋆⋆

1. Pour $k \geqslant 1$ et $a, b \in \mathbb{R}$, on calcule :

$$\frac{a}{2k+1} + \frac{b}{2k-1} = \frac{a(2k-1)+b(2k+1)}{(2k+1)(2k-1)} = \frac{2k(a+b)+(b-a)}{4k^2-1}.$$

Il suffit donc de prendre $a+b = \frac{1}{2}$ et $b - a = 0$, c'est-à-dire $a = b = \frac{1}{4}$ pour avoir :

$$\boxed{\frac{\frac{1}{4}}{2k+1} + \frac{\frac{1}{4}}{2k-1} = \frac{k}{4k^2+1}.}$$

2. On a donc, sous réserve de convergence :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{4n^2-1} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4} \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n-1} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{(-1)^{(n+1)+1}}{4(2(n+1)-1)} + \frac{(-1)^{n+1}}{4(2n-1)} \right). \end{aligned}$$

C'est une somme télescopique. En passant aux sommes partielles, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N} \left(-\frac{(-1)^{(n+1)+1}}{4(2(n+1)-1)} + \frac{(-1)^{n+1}}{4(2n-1)} \right) &= \frac{1}{12} - \frac{(-1)^{N+2}}{4(2(N+1)-1)} \\ &= \frac{1}{12} - \underbrace{\frac{(-1)^N}{8N+4}}_{\to 0} \\ &\xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

Donc la série converge et :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{1}{12}.}$$

Exercice 17 ⋆⋆

1. On a :

$$u_k = \ln\left(1 + \underbrace{\frac{2}{k(k+3)}}_{\xrightarrow[k\to+\infty]{}0}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{2}{k(k+3)} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{2}{k^2}.$$

La série $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{k^2}$ converge (critère de Riemann) et par équivalence de séries à termes positifs, $\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} u_k \text{ converge également.}}$

2. Comme $k=-1$ est une racine évidente du polynôme suivant, on a pour tout $k \geqslant 1$:

$$\boxed{k(k+3)+2 = k^2+3k+2 = (k+1)(k+2).}$$

On calcule alors :

$$\begin{aligned} u_k &= \ln\left(1+\frac{2}{k(k+3)}\right) = \ln\left(\frac{k(k+3)+2}{k(k+3)}\right) \\ &= \ln\left(\frac{(k+1)(k+2)}{k(k+3)}\right) \boxed{= \underbrace{\ln\left(\frac{k+1}{k+3}\right)}_{=v_{k+1}} - \underbrace{\ln\left(\frac{k}{k+2}\right)}_{=v_k}.} \end{aligned}$$

3. Calculons les sommes partielles. Pour $n \geqslant 1$, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} u_k &= \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{2}{k(k+3)}\right) = \sum_{k=1}^{n} (v_{k+1}-v_k) \\ &= v_{n+1} - v_1 = \ln\frac{n+1}{n+3} - \ln\frac{1}{3} \\ &= \ln\frac{3n+3}{n+3}. \end{aligned}$$

Et donc, puisque la série converge :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty} \ln\frac{3n+3}{n+3} = \ln 3.}$$

Exercice 18 ⋆ ⋆ ⋆

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} \exp(-\ln(n)^\alpha)$.
Commençons par remarquer que pour $\alpha = 1$, on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \exp(-\ln(n)^1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

qui est clairement divergente. Cela peut suggérer que $\alpha = 1$ est un point de bascule. Par tons de cette intuition :

- **Cas** $\alpha > 1$. Montrons que la série converge.
  On a :
$$n^2\exp(-\ln(n)^\alpha) = \exp\left(2\ln(n) - \ln(n)^\alpha\right) = \exp\left(\underbrace{\ln(n)\left[2 - \underbrace{\ln(n)^{\alpha-1}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty}\right]}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}-\infty}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$
  D'où :
$$\exp(-\ln(n)^\alpha) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$
  Et donc par négligeabilité, $\boxed{\text{la série est absolument convergente (donc convergente)}}$ pour $\alpha > 1$.
- **Cas** $\alpha = 1$. Déjà traité. $\boxed{\text{La série diverge.}}$
- **Cas** $\alpha < 1$. Dans ce cas, calculons :
$$\frac{\frac{1}{n}}{\exp(-\ln(n)^\alpha)} = \exp\left(-\ln(n) + \ln(n)^\alpha\right) = \exp\left(\underbrace{\ln(n)\left[\underbrace{\ln(n)^{\alpha-1}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}0} - 1\right]}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}-\infty}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$
  D'où :
$$\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\exp(-\ln(n)^\alpha)\right).$$
  Donc si la série convergeait, par négligeabilité, la série harmonique convergerait aussi. Or ce n'est pas le cas. Donc $\boxed{\text{la série diverge}}$ pour $\alpha < 1$.

2. $\sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{e^{n^\alpha} - 1}$.
   - **Cas** $\alpha > 0$. Commençons par remarquer que pour $\alpha > 0$, on a $\sqrt{e^{n^\alpha} - 1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et donc $\boxed{\text{la série diverge (très) grossièrement.}}$
   - **Cas** $\alpha = 0$. De manière similaire, $\sqrt{e^{n^0} - 1} = \sqrt{e - 1} \neq 0$ et donc $\boxed{\text{la série diverge grossièrement.}}$
   - **Cas** $\alpha < 0$. On a :
$$e^{n^\alpha} - 1 = 1 + n^\alpha + \underset{n\to+\infty}{o}(n^\alpha) - 1.$$
     Donc $e^{n^\alpha} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n^\alpha$. On peut alors passer à la racine, en ne la considérant non pas comme une fonction, mais comme l'élévation à la puissance $\frac{1}{2}$. On a donc :
$$\sqrt{e^{n^\alpha} - 1} \underset{n\to+\infty}{\sim} n^{\frac{\alpha}{2}}.$$
     Les termes sont positifs. On peut donc distinguer deux cas.
     (a) $\boxed{\text{Si } \alpha < -2, \text{ alors la série converge.}}$
     (b) $\boxed{\text{Sinon, la série diverge.}}$
     Les deux cas se déduisent du critère du Riemann.

Exercice 19 - Constante d'Euler ⋆⋆⋆

1. Faisons un développement limité de u_n pour $n \to +\infty$:

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}.}$ Par équivalence de séries à termes positifs, $\boxed{\text{la série des } u_n \text{ converge}}$ (critère de Riemann).

De plus, pour $N \geqslant 2$, on a :

$$\boxed{\sum_{n=2}^{N} u_n = \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n} + \sum_{n=2}^{N}(\ln(n-1) - \ln(n)) = \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n} + \underbrace{\ln(1)}_{=0} - \ln(N).}$$

2. Comme la série des u_n converge, on en déduit qu'il existe une constante $\alpha \in \mathbb{R}$ telle que :

$$\sum_{n=2}^{N} u_n \xrightarrow[N\to+\infty]{} \alpha.$$

Avec ce qui précède, on peut écrire :

$$\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n} - \ln(N) - \alpha \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$$

que l'on peut encore écrire :

$$\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n} - \ln(N) - \alpha = \underset{N\to+\infty}{o}(1).$$

En renommant l'indice et en rajoutant le premier terme, on obtient :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \underbrace{\alpha + 1}_{=\gamma} + \underset{n\to+\infty}{o}(1).}$$

En divisant par $\ln(n)$, on obtient :

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}{\ln(n)} = 1 + \frac{\gamma}{\ln(n)} + \underset{n\to+\infty}{o}(1/\ln(n)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n).}$$

Exercice 20 - Séries alternées ⋆⋆⋆

1. Vérifions les trois points de la définition d'adjacence :
   - **Décroissance de (S_{2n}).** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} S_{2(n+1)} - S_{2n} &= \sum_{k=0}^{2(n+1)} (-1)^k u_k - \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k u_k \\ &= (-1)^{2n+1} u_{2n+1} + (-1)^{2n+2} u_{2n+2} \\ &= u_{2n+2} - u_{2n+1} \leqslant 0 \text{ (décroissance de } (u_n)) \end{aligned}$$

   Donc $\boxed{(S_{2n}) \text{ est décroissante.}}$

- **Croissance de (S_{2n+1}).** De même, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} &= \sum_{k=0}^{2(n+1)+1} (-1)^k u_k - \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k u_k \\ &= (-1)^{2n+2} u_{2n+2} + (-1)^{2n+3} u_{2n+3} \\ &= u_{2n+2} - u_{2n+3} \geqslant 0 \text{ (décroissance de } (u_n)) \end{aligned}$$

  Donc $\boxed{(S_{2n+1}) \text{ est croissante.}}$

- **Limite de $S_{2n+1} - S_{2n}$.** On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} S_{2n+1} - S_{2n} &= \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k u_k - \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k u_k \\ &= (-1)^{2n+1} u_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0. \end{aligned}$$

  Donc $\boxed{S_{2n+1} - S_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.}$

$\boxed{\text{Les suites } (S_{2n}) \text{ et } (S_{2n+1}) \text{ sont bien adjacentes.}}$

2. Comme (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes, elles ont une limite réelle commune. Comme, de plus, il s'agit des termes pairs et impairs de la suite des sommes partielles, la suite des sommes partielles a, à son tour, cette même limite.
   Donc $\boxed{\text{la série } \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n \text{ converge.}}$
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. La série R_n est bien convergente, puisque c'est le reste d'une série convergente.
   - **Cas n impair.**
     Comme la série R_n converge, la suite des sommes partielles $(\sum_{k=n+1}^{N} (-1)^k u_k)_N$ converge (vers R_n). Notons cette suite $(v_N)_N$. En particulier, la sous-suite des termes pairs $(v_{2N})_N$ converge également vers R_n. Étudions cette sous-suite.
     On a :
$$v_{2N} = \sum_{k=n+1}^{2N} (-1)^k u_k = \underbrace{(-1)^{n+1}}_{=1} u_{n+1} + \sum_{k=n+2}^{2N} (-1)^k u_k.$$
     En regroupant les termes deux à deux dans la dernière somme, on obtient :
$$v_{2N} = u_{n+1} + \sum_{k'=\frac{n+3}{2}}^{N} \underbrace{(u_{2k'} - u_{2k'-1})}_{\leqslant 0} \leqslant u_{k+1}.$$
     Par passage à la limite, on obtient :
$$\boxed{R_n \leqslant u_{k+1}.}$$
     Si on étudie la suite (v_{2N+1}), et si on rassemble les termes deux à deux, on obtient plutôt :
$$v_{2N+1} = \sum_{k'=\frac{n+1}{2}}^{N} \underbrace{(u_{2k'} - u_{2k'+1})}_{\geqslant 0} \geqslant 0.$$
     En passant à la limite, on obtient :
$$\boxed{R_n \geqslant 0.}$$
     Et donc on a bien :
$$\boxed{0 \leqslant |R_n| \leqslant u_{n+1}.}$$
   - **Cas n pair.**
     On procède de même en faisant attention aux signes qui font apparaître la valeur absolue.

Exercice 21 - Formule de Stirling ⋆⋆⋆⋆

1. Commençons par calculer un peu, avec $n \in \mathbb{N}$ fixé :

$$\begin{aligned}
v_n &= \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln\left(\frac{\frac{\sqrt{n+1}\left(\frac{n+1}{\mathrm{e}}\right)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{\sqrt{n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^{n}}{n!}}\right) \\
&= \ln\left(\frac{n!}{(n+1)!} \times \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} \times \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \times \frac{\mathrm{e}^n}{\mathrm{e}^{n+1}}\right) \\
&= \ln\left(\frac{1}{n+1} \times \sqrt{1+\frac{1}{n}} \times (n+1) \times \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \times \mathrm{e}^{-1}\right) \\
&= \ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} \times \mathrm{e}^{-1}\right) \boxed{= \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1.}
\end{aligned}$$

On y voit plus clair. Comme on a une différence, les équivalents ne semblent pas adaptés. Faisons donc un développement limité. Pour voir apparaître du $\frac{1}{n^2}$, il faut au moins aller à l'ordre 3 (à cause du n devant). C'est parti :

$$\begin{aligned}
\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1 &= \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - 1 \\
&= 1 + \frac{1}{12n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) - 1 \boxed{= \frac{1}{12n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)}
\end{aligned}$$

et cela prouve bien le résultat attendu.

2. Par comparaison de séries de terme général positif (au voisinage de $+\infty$), la série des v_n est de la même nature que la série des $\frac{1}{12n^2}$ qui est convergente par critère de Riemann.
Maintenant, remarquons que pour $N \in \mathbb{N}$ fixé :

$$\sum_{n=0}^{N} v_n = \sum_{n=0}^{N}(\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)) = \ln(u_{N+1}) - \ln(u_0).$$

que l'on peut réécrire :

$$\ln(u_N) = \sum_{n=0}^{N-1} v_n + \ln(u_0).$$

Ainsi si la **série** des v_n converge, alors la **suite** $(\ln(u_N))_{N\in\mathbb{N}}$ converge également.
Et par composition par une fonction continue (exp), $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ converge également.}}$

3. On vient de montrer qu'il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\frac{\sqrt{n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n}{n!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \beta.$$

Il suffit de montrer que $\beta > 0$. Alors, en posant $\alpha = \frac{1}{\beta}$, on aura le résultat attendu.
On a déjà montré que $(\ln(u_n))$ converge. Il existe donc γ tel que $\ln(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \gamma$. Par composition par une fonction continue, on a :

$$u_n = \exp(\ln(u_n)) \to \exp(\gamma) > 0.$$

Donc, par unicité de la limite, $\beta > 0$ et on a bien la conclusion attendue, à savoir :
$\boxed{\text{il existe } \alpha \in \mathbb{R}_+^\star \text{ tel que } n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha\sqrt{n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n.}$

3 Séries doubles

Exercice 22 ⋆⋆

La seule notion de convergence que nous avons vu pour une série double est la notion de *famille sommable* qui est l'équivalent de la convergence absolue.
On se pose donc la question suivante :

« La série double $\sum_{n\geq 1, m\geq 0}\left|\frac{(-1)^{n+m}2^m}{n\times m!}\right| = \sum_{n\geq 1, m\geq 0}\frac{2^m}{n\times m!}$ converge ? »

Utilisons le théorème de Fubini. Il faut et il suffit que $\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{2^m}{n\times m!}$ converge absolument pour tout n puis que $\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{2^m}{n\times m!}$ converge à son tour.
On a clairement :

$$\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{2^m}{n\times m!} = \frac{1}{n}\mathrm{e}^2.$$

En revanche, la série harmonique ne converge pas et donc $\boxed{\text{la série double ne converge pas}}$ non plus.

Exercice 23 ⋆⋆⋆

Attention ! *Correction rapide. Ce n'est pas un modèle de rédaction.*

1. $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$ (absolument convergente). $\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{2}{2^m m!} = 2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$ (absolument convergente). En appliquant le théorème de Fubini, la série double converge et $\boxed{\sum_{m\geq 0, n\geq 0}\frac{1}{2^{m+n}m!} = 2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}.}$
2. $\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(-1)^m n^m}{m!} = \mathrm{e}^{-n}$ (absolument convergente). En revanche, $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{+\infty}\left|\frac{(-1)^m n^m}{m!}\right| = \sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^n$ diverge. Donc $\boxed{\text{la série double n'est pas sommable.}}$
3. Sommons avec les paquets $n+m=k$. On a $\sum_{n=0}^{k-1}\frac{k-1}{2^{k-2}} = \frac{k(k-1)}{2^{k-2}}$ (termes positifs). Et $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k(k-1)}{2^{k-2}}$ est une série géométrique dérivée convergente. Donc la série double converge et $\boxed{\sum_{m\geq 1, n\geq 0}\frac{n+m-1}{2^{m+n-2}} = \frac{2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3} = 16.}$

Exercice 24 ⋆⋆⋆

On va appliquer le théorème de Fubini de sommations par paquets. On va, pour simplifier les calculs, utiliser les paquets $m+n=k$. Dit autrement, au lieu de sommer sur m et sur n séparément, on va sommer sur toutes les k possibles puis on va sommer sur toutes les possibilités de m et n qui donnent $m+n=k$.
Concrètement, on commence par regarder pour k fixé :

$$\sum_{m+n=k}\frac{1}{(m+n)^\alpha} = \sum_{m+n=k}\frac{1}{k^\alpha} = \frac{k-1}{k^\alpha}.$$

Les termes étant tous positifs, la convergence absolue et la convergence sont équivalentes. Et il y a tout simplement un nombre finie de possibilités pour m et n : de $n=1$ à $k-1$ avec $m=k-1$ à 1.
Maintenant considérons :

$$\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{k-1}{k^\alpha}.$$

Les termes sont encore une fois positifs donc pas la peine de s'inquiéter de la convergence absolue. On a : $\frac{k-1}{k^\alpha}\sim\frac{1}{k^{\alpha-1}}$.
Par équivalence de séries à termes positifs, la série converge si et seulement si $\alpha-1>1$ (critère de Riemann) c-est-à-dire si et seulement si $\alpha>2$.
Donc d'après le théorème de Fubini, $\boxed{\text{la série double } \sum_{m\geq 1, n\geq 1}\frac{1}{(m+n)^\alpha} \text{ est sommable si et seulement si } \alpha>2.}$

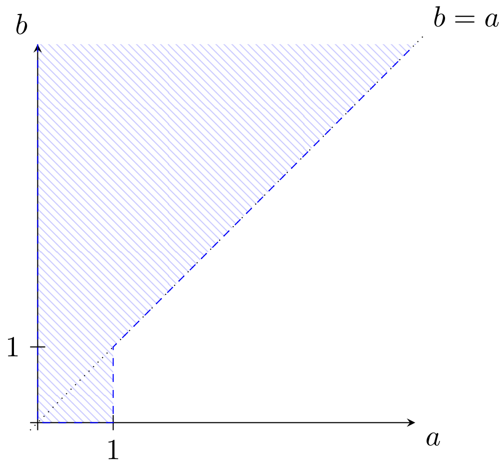
4 Exercices de concours

Exercice 25 - QSP HEC 2008 ⋆⋆⋆⋆

Il est naturel de chercher un équivalent u_n. L'équivalent va d'abord dépendre de l'importance relative entre 1 et b^n et donc de la position relative de 1 et b. On distingue donc trois cas :

- **Cas $b > 1$.** Dans ce cas $1 + b^n \sim b^n$ et donc :
$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{a^n}{b^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{a}{b}\right)^n.$$
La série de terme général $\left(\frac{a}{b}\right)^n$ est une série géométrique. Elle est donc convergente si et seulement si $-1 < \frac{a}{b} < 1$ et donc, comme $a > 0$ et $b > 0$, si et seulement si $a < b$.
- **Cas $b = 1$.** Dans ce cas :
$$u_n = \frac{a^n}{2}.$$
(u_n) est une suite géométrique. Sa somme converge si et seulement si $a < 1$ (puisque $a > 0$).
- **Cas $b < 1$.** Dans ce cas :
$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{a^n}{1} \underset{n\to+\infty}{\sim} a^n.$$
La série de terme général a^n est une série géométrique. Elle est donc convergente si et seulement si $-1 < a < 1$ et donc, comme $a > 0$, si et seulement si $a < 1$.

Dans le plan, cela donne :



La partie hachurée correspond à la zone de convergence et les limites en pointillés sont exclues.

Exercice 26 - Oral ESCP 2018 ⋆⋆⋆⋆

1. (u_n) est clairement bien définie par récurrence. Pour (v_n), il faut s'assurer que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   - **Initialisation :** On a bien $u_0 > 0$ par hypothèse.
   - **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $u_n > 0$. On a :
   $$u_{n+1} = \frac{u_n^2}{n+1} > 0.$$

   Donc $\boxed{\text{la suite } (v_n) \text{ est bien définie.}}$
2. (a) On a :
$$\frac{\ln k}{2^k} = \underbrace{\frac{\ln k}{\sqrt{2}^k}}_{\to 0} \times \frac{1}{\sqrt{2}^k} = \underset{k\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{\sqrt{2}^k}\right).$$
Or la série de terme général $\frac{1}{\sqrt{2}^k}$ est une série (positive) géométrique convergente. Donc par négligeabilité, $\boxed{\text{la série } \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln k}{2^k} \text{ converge}}$ (et même absolument).

   (b) Soit $k \in \mathbb{N}$. On a :
$$v_{k+1} = \frac{\ln(u_{k+1})}{2^{k+1}} = \frac{\ln \frac{u_k^2}{n+1}}{2^{k+1}} = \frac{\ln(u_k)}{2^k} - \frac{\ln(n+1)}{2^{k+1}} = v_k - \frac{\ln(n+1)}{2^{k+1}}.$$

Ainsi $v_{k+1} - v_k = -\frac{\ln(n+1)}{2^{k+1}}$ et en sommant :

$$v_{n+1} - \underbrace{v_0}_{=\frac{\ln(u_0)}{2^0}} = \sum_{k=0}^{n}(v_{k+1} - v_k) = -\sum_{k=0}^{n}\frac{\ln(k+1)}{2^{k+1}}$$

qui donne finalement pour $n \in \mathbb{N}^\star$:

$$v_n = \ln(u_0) - \sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(k)}{2^k}$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient la convergence de (v_n) (comme somme) et :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = \ln(u_0) + \sigma.}$$

3. On a :

$$u_n = \mathrm{e}^{2^n v_n}.$$

Donc si $u_0 \neq \mathrm{e}^{-\sigma}$, alors $v_n \not\to 0$. On se retrouve uniquement avec des formes déterminées.

- Si $u_0 > \mathrm{e}^{-\sigma}$ alors $v_n \to \ell > 0$ et $\boxed{u_n \to +\infty.}$
- Si $u_0 < \mathrm{e}^{-\sigma}$ alors $v_n \to \ell' < 0$ et $\boxed{u_n \to 0.}$

4. (a) - **Initialisation :** On suppose ici que $u_0 = \mathrm{e}^{-\sigma}$. Ainsi :

$$v_0 = \ln(u_0) = -\sigma = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\ln k}{2^k}.$$

Donc la propriété est vérifiée pour $n = 0$.

- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $v_n \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{\ln k}{2^k}$. On a alors, avec les calculs déjà fait précédemment :

$$\boxed{v_{n+1} = v_n - \frac{\ln(n+1)}{2^{n+1}} = \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{\ln k}{2^k} - \frac{\ln(n+1)}{2^{n+1}} = \sum_{k=n+2}^{+\infty}\frac{\ln k}{2^k}.}$$

Par récurrence, la propriété est vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) On a :

$$\begin{aligned} 2^n v_n &= 2^n \sum_{k=n+2}^{+\infty}\frac{\ln k}{2^k} \\ &= \sum_{k=n+2}^{+\infty}\frac{\ln k}{2^{k-n}} \\ &= \sum_{k'=2}^{+\infty}\frac{\ln(k'+n)}{2^{k'}}. \end{aligned}$$

Attention ! On ne peut pas prendre la limite à ce stade car il y a du n *dans* le terme général de la série. Cherchons à le faire sortir. On a, sous réserve de convergence :

$$\begin{aligned} \sum_{k'=2}^{+\infty}\frac{\ln(k'+n)}{2^{k'}} &= \sum_{k'=2}^{+\infty}\frac{\ln\left(n\left[1+\frac{k'}{n}\right]\right)}{2^{k'}} \\ &= \ln(n)\sum_{k'=2}^{+\infty}\frac{1}{2^{k'}} + \sum_{k'=2}^{+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{k'}{n}\right)}{2^{k'}}. \end{aligned}$$

La première série est géométrique et donc converge. La seconde converge nécessairement comme différence des deux autres. Remarquons seulement que :

$$\sum_{k'=2}^{+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{k'}{n}\right)}{2^{k'}} \geqslant 0.$$

Ainsi :

$$2^n v_n \geqslant \ln(n) \sum_{k'=2}^{+\infty} \frac{1}{2^{k'}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

D'où finalement :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.}$$

Exercice 27 - QSP HEC 2014 ⋆⋆⋆⋆

1. On a :

$$\begin{aligned}
u_n &= \ln(n) + a\ln(n+1) + b\ln(n+2) \\
&= \ln(n) + a\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) + b\ln\left(n\left(1+\frac{2}{n}\right)\right) \\
&= (1+a+b)\ln(n) + a\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + b\ln\left(1+\frac{2}{n}\right) \\
&= (1+a+b)\ln(n) + a\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + b\left(\frac{2}{n} - \frac{2^2}{2n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
&= (1+a+b)\ln(n) + \frac{a+2b}{n} - \frac{a+4b}{2n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).
\end{aligned}$$

Donc si $1+a+b \neq 0$, la série de terme général u_n diverge grossièrement. Si $1+a+b=0$, alors il y a deux possibilités :

- $a+2b \neq 0$. Dans ce cas, $u_n \sim \frac{a+2b}{n}$ qui est de signe constant et le terme général d'une série divergente (harmonique).
- $a+2b=0$. Dans ce cas, $u_n \sim \frac{a+4b}{2n^2}$ (à condition que $a+4b \neq 0$ ce qu'on peut facilement vérifier que avec la résolution qui suit) qui est de signe constant et le terme général d'une série convergente (critère de Riemann).

Ainsi $\sum u_n$ est convergente si et seulement si $1+a+b=0$ et $a+2b=0$. On résout :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 1+a+b &=& 0 \\ a+2b &=& 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 1-2b+b &=& 0 \\ a &=& -2b \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} b &=& 1 \\ a &=& -2 \end{array}\right. .$$

Donc $\boxed{\text{la série converge uniquement pour } (a,b)=(-2,1).}$

2. Dans ce cas, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} u_n &= \sum_{n=1}^{+\infty} (\ln(n) - 2\ln(n+1) + \ln(n+2)) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\frac{n(n+2)}{(n+1)^2} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\ln\frac{n}{n+1} - \ln\frac{n+1}{n+2}\right).
\end{aligned}$$

C'est une série télescopique. En passant aux sommes partielles, on a :

$$\sum_{n=1}^{N} u_n = \sum_{n=1}^{N} \left(\ln\frac{n}{n+1} - \ln\frac{n+1}{n+2}\right) = \ln\frac{1}{2} - \ln\frac{N+1}{N+2} = \ln\frac{N+2}{2N+2} \xrightarrow[N\to+\infty]{} -\ln 2.$$

Donc :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = -\ln 2.}$$

Exercice 28 - QSP ESCP 2006 ⋆⋆⋆⋆⋆

1. La fonction $f : x \mapsto \ln(x) + x$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$. On a pour $x \in \mathbb{R}_+^\star$:

$$f'(x) = \frac{1}{x} + 1 > 0.$$

Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^\star$.
De plus, $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ et $f(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\infty$. Comme f est continue sur $\mathbb{R}_+^\star$ (car dérivable) et strictement croissante, avec les limites précédentes et d'après le théorème de la bijection, f est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}_+^\star$ sur $\mathbb{R}$.
Soit donc $n \in \mathbb{N}^\star$. Comme $\frac{1}{n} \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{n}$ admet un unique antécédent par f. Il y a donc bien un unique $y_n \in \mathbb{R}_+^\star$ tel que :

$$\boxed{\ln(y_n) + y_n = \frac{1}{n}.}$$

2. La suite des y_n est une suite de réels (strictement) positifs. Elle est donc minorée. Pour montrer la convergence de cette suite, il est donc naturel d'étudier les variations de cette suite.
D'après ce qui précède, $y_n = f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$. Or f^{-1} a les mêmes variations que f, donc f^{-1} est (strictement) croissante. Ainsi :

$$n < n+1 \Leftrightarrow \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \Leftrightarrow f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) > f^{-1}\left(\frac{1}{n+1}\right) \Leftrightarrow y_n > y_{n+1}.$$

Comme $n < n+1$, on a bien $y_n > y_{n+1}$ et donc $\boxed{(y_n) \text{ est décroissante.}}$
Comme (y_n) est décroissante et minorée (par 0), $\boxed{\text{la suite } (y_n) \text{ converge vers une limite réelle,}}$ notons-la ℓ.
Remarquons également que :

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = \lim_{n\to+\infty} f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{x\to 0^+} f^{-1}(x) = f^{-1}(0)$$

puisque f^{-1} est continue (d'après le théorème de la bijection). On a donc :

$$\ell = f^{-1}(0)$$

et donc en appliquant f, $f(\ell) = 0$, c'est-à-dire :

$$\boxed{\ln(\ell) + \ell = 0.}$$

On a désormais une expression algébrique manipulable pour ℓ.
On en déduit :

$$\ln(y_n) + y_n - \ln(\ell) - \ell = \frac{1}{n}.$$

Donc :

$$y_n - \ell = \frac{1}{n} - \ln\frac{y_n}{\ell} = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{y_n - \ell}{\ell}\right).$$

Or, on sait que $y_n \to \ell$, on peut donc faire un développement limité. On a :

$$y_n - \ell = \frac{1}{n} - \frac{y_n - \ell}{\ell} + \underset{n\to+\infty}{o}(y_n - \ell).$$

Et après quelques opérations algébriques :

$$\frac{\ell}{(1+\ell)n} = y_n - \ell + \underset{n\to+\infty}{o}(y_n - \ell).$$

C'est dans le sens inverse par rapport à d'habitude, mais ça se lit bien :

$$\boxed{\frac{\ell}{(1+\ell)n} \underset{n\to+\infty}{\sim} y_n - \ell.}$$

Exercice 29 - Oral HEC 2012 ⋆⋆⋆⋆⋆

1.
```python
def somme(n):
  u = 1
  S = u
  for i in range(0,n):
    u = (2*i+2)/(2*i+5)*u
    S = S + u
  return S
```

*La boucle va de 0 inclus à n **exclu**. En effet, on rajoute uniquement les $n-1$ derniers termes après l'initialisation. Et il est naturel de compter à partir de 0 car la formule de calcul de u_{n+1} utilise le terme précédent.*

2. (a) On a :

$$\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to0}{o}(x^2).}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On a :

$$\begin{aligned}
\ln v_n &= \ln\left(\frac{(n+1)^\alpha u_{n+1}}{n^\alpha u_n}\right) = \alpha\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \\
&= \alpha\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(\frac{2n+2}{2n+5}\right) \\
&= (\alpha+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln\left(\frac{2n+5}{2n+2}\right) \\
&= (\alpha+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln\left(\frac{(2n+5)(n+1)}{2n(n+1)}\right) \\
&= (\alpha+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln\left(\frac{2n+5}{2n}\right) \boxed{= (\alpha+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{5}{2n}\right).}
\end{aligned}$$

Faisons un développement limité :

$$\begin{aligned}
\ln(v_n) &= (\alpha+1)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \left(\frac{5}{2n} - \frac{25}{8n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
&= \left(\alpha+1-\frac{5}{2}\right)\times\frac{1}{n} + \left(\frac{25}{8} - \frac{\alpha+1}{2}\right)\times\frac{1}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&= \left(\alpha-\frac{3}{2}\right)\times\frac{1}{n} + \frac{21-4\alpha}{8}\times\frac{1}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).
\end{aligned}$$

Donc si $\alpha - \frac{3}{2} \neq 0$ alors $\ln(v_n) \sim \frac{\alpha-\frac{3}{2}}{n}$ est donc la série diverge. Si au contraire, $\alpha - \frac{3}{2} = 0$, alors $\ln(v_n) \sim \frac{21-4\alpha}{8n^2}$ (puisque le numérateur est alors non nul) et la série converge.

Donc la série converge pour la valeur $\boxed{\alpha_0 = \frac{3}{2}.}$

(c) On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \ln(v_k) &= \sum_{k=1}^{n} (\ln((k+1)^\alpha u_{k+1}) - \ln(k^\alpha u_k)) \\
&= \ln((n+1)^\alpha u_{n+1}) - \ln(u_1) \boxed{= \ln((n+1)^\alpha u_{n+1}) - \ln\frac{2}{5}.}
\end{aligned}$$

Pour $\alpha = \alpha_0$, la série des $\ln(v_k)$ converge. Notons :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \ln(v_k) = \ell.$$

On a donc :

$$\ln(n^{\alpha_0} u_n) - \ln \frac{2}{5} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell.$$

Décaler l'indice de 1 ne change pas la limite.

Et donc :

$$n^{\alpha_0} u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \exp\left(\ell + \ln \frac{2}{5}\right),$$

ce qui peut se réécrire :

$$\boxed{u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{C}{n^{\alpha_0}}.}$$

avec $\boxed{C = \frac{2}{5}\mathrm{e}^{\ell}.}$

Par équivalence de séries à termes positifs et critère de Riemann ($\alpha_0 = \frac{3}{2}$), $\boxed{\sum u_n \text{ converge.}}$

(d) D'après ce qui précède, $(k^{\alpha_0} u_k)$ converge et donc est bornée. On en déduit en particulier qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+^\star$ tel que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^\star,\ k u_k \leqslant \frac{M}{\sqrt{k}}.$$

Ainsi :

$$\sum_{k=0}^{n} k u_k = \sum_{k=1}^{n} k u_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{M}{\sqrt{k}}.$$

Pour majorer la somme des $\frac{1}{\sqrt{k}}$ faisons une comparaison série-intégrale.
La fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est décroissante. Donc pour $t \in [k-1, k[$, on a :

$$\frac{1}{\sqrt{t}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Ainsi par croissance de l'intégrale :

$$\int_{k-1}^{k} \frac{1}{\sqrt{t}} \mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

En sommant :

$$\int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{\sqrt{t}} \mathrm{d}t \geqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

et donc, après intégration :

$$2\sqrt{n} - 2 \geqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

On rajoute le premier terme manquant (qui avait été enlevé pour éviter une division par 0) :

$$2\sqrt{n} - 1 \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

On a finalement :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k u_k \leqslant 2M\sqrt{n} - M \leqslant D\sqrt{n}}$$

avec $\boxed{D = 2M.}$

3. (a) D'après la relation de récurrence de (u_n), on a : $(2k+5)u_{k+1} = (2k+2)u_k$. Ainsi :

$$\begin{aligned} 2\sum_{k=1}^{n+1} ku_k + 3\sum_{k=1}^{n+1} u_k &= \sum_{k=1}^{n+1}(2k+3)u_k = \sum_{k'=0}^{n}(2k'+5)u_{k'+1} \\ &= \sum_{k'=0}^{n}(2k'+2)u_{k'} \boxed{= 2\sum_{k=0}^{n} ku_k + 2\sum_{k=0}^{n} u_k.} \end{aligned}$$

(b) Reprenons la relation précédente :

$$\begin{aligned} 2\sum_{k=1}^{n+1} ku_k + 3\sum_{k=1}^{n+1} u_k &= 2\sum_{k=0}^{n} ku_k + 2\sum_{k=0}^{n} u_k \\ \Leftrightarrow 2\sum_{k=1}^{n+1} ku_k + 3\sum_{k=1}^{n+1} u_k - 2\sum_{k=0}^{n} ku_k - 2\sum_{k=0}^{n} u_k &= 0 \\ \Leftrightarrow 2(n+1)u_{n+1} - 2\times 0\times u_0 + \sum_{k=1}^{n} u_k + 3u_{n+1} - 2\underbrace{u_0}_{=1} &= 0 \\ \Leftrightarrow (2n+5)u_{n+1} - 2 + \sum_{k=1}^{n} u_k &= 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} u_k &= 2-(2n+5)u_{n+1} \\ \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} u_k &= 3-(2n+5)u_{n+1}. \end{aligned}$$

Or $u_n \sim \frac{C}{n^{\frac{3}{2}}}$ Donc $(2n+5)u_{n+1} \to 0$. D'où :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = 3.}$$