TD2 - Variables aléatoires discrètes - Correction

1 Séries doubles

Exercice 1 ⋆⋆

Appliquons le théorème de Fubini. Il suffit que :

- pour tout $i \geqslant 2$, $\sum_{j=2}^{+\infty} \frac{1}{i^j}$ converge et
- $\sum_{i=2}^{+\infty} \left(\sum_{j=2}^{+\infty} \frac{1}{i^j} \right)$ converge.

On n'a pas besoin des valeurs absolues puisque tous les termes sont positifs.
On a pour $i \geqslant 2$:

$$\sum_{j=2}^{+\infty} \frac{1}{i^j} = \frac{1}{i^2} \frac{1}{1-\frac{1}{i}} = \frac{1}{i(i-1)}$$

puisque $0 < \frac{1}{i} < 1$. Et on reconnaît le terme général d'une série télescopique puisque, pour $N \geqslant 2$:

$$\sum_{i=2}^{N} \left(\sum_{j=2}^{+\infty} \frac{1}{i^j} \right) = \sum_{i=2}^{N} \frac{1}{i(i-1)} = \sum_{i=2}^{N} \left(\frac{1}{i-1} - \frac{1}{i} \right) = \frac{1}{1} - \underbrace{\frac{1}{N}}_{\xrightarrow[N\to+\infty]{} 0}.$$

D'où $\boxed{\text{la série double converge}}$ et :

$$\boxed{\sum_{i=2}^{+\infty} \sum_{j=2}^{+\infty} \frac{1}{i^j} = 1.}$$

2 Lois usuelles et formalisme

Exercice 2 ⋆

1. Pour $N \in \mathbb{N}^\star$, on a :

$$\sum_{n=1}^{N} u_n = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{N+1} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 1.$$

Donc la série $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \text{ converge}}$ et $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 1.}$

2. X admet une espérance si et seulement si $\sum_{n=1}^{+\infty} n\mathbb{P}(X=n)$ converge absolument. On a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n\mathbb{P}(X=n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1} = \sum_{n'=2}^{+\infty} \frac{1}{n'}$$

qui est la série harmonique divergente. Donc $\boxed{X \text{ n'admet pas d'espérance.}}$

$\boxed{\textit{A fortiori, } X \text{ n'admet pas de variance.}}$

Pour $\sqrt{X}$, on applique le théorème de transfert. $\sqrt{X}$ admet une espérance si et seulement si : $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n}\mathbb{P}(X=n)$ converge absolument. Or :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n}\mathbb{P}(X=n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(n+1)}.$$

Or $\frac{1}{\sqrt{n}(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{3/2}}$. La série $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ converge (critère de Riemann). Par équivalence de séries à termes positifs, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(n+1)}$ converge également. Donc $\boxed{\sqrt{X} \text{ admet une espérance.}}$
En revanche, $\sqrt{X}$ admet une variance si et seulement si $\sqrt{X}$ admet un moment d'ordre 2, c'est-à-dire si et seulement si X admet une espérance. Donc $\boxed{\sqrt{X} \text{ n'admet pas une variance.}}$

Exercice 3 ⋆

Puisque $(\mathbb{P}(X=n))_{n\geq 1}$ est une suite géométrique, notons q sa raison. On a alors pour tout $n \geqslant 1$:

$$\mathbb{P}(X=n) = \mathbb{P}(X=1)q^{n-1}.$$

Or, on a nécessairement :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n) = 1$$

puisque les événements $[X=n]_{n\geqslant 1}$ forment un système complet d'événements. On a calcule :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X=1)q^{n-1} = \mathbb{P}(X=1)\sum_{n=1}^{+\infty} q^{n-1}.$$

La série converge nécessairement d'après ce qu'on vient de dire, donc $|q| < 1$ et :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n) = \mathbb{P}(X=1)\sum_{n=1}^{+\infty} q^{n-1} = \mathbb{P}(X=1)\frac{1}{1-q}.$$

Puisque $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n) = 1$, on en déduit :

$$\mathbb{P}(X=1) = 1-q.$$

D'où pour tout $n \geqslant 1$:

$$\boxed{\mathbb{P}(X=n) = (1-q)q^{n-1}.}$$

$\boxed{\text{Il s'agit bien d'une loi géométrique de paramètre } 1-q.}$

Exercice 4 ⋆

On sait que X suit une loi géométrique de paramètre p. Pour tout $n \geqslant 1$, on a :

$$\mathbb{P}(Y = \frac{1}{n}) = \mathbb{P}(X=n) = p(1-p)^{n-1}.$$

Y admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\mathbb{P}(X=n)$ converge absolument (théorème de transfert). Calculons cette série :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\mathbb{P}(X=n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}p(1-p)^{n-1}.$$

Pour évaluer la convergence de cette série, comparons-la à une série géométrique. Comme $n \geqslant 1$, on a $\frac{1}{n} \leqslant 1$. Ainsi, pour chaque terme de la série :

$$\frac{1}{n}p(1-p)^{n-1} \leqslant p(1-p)^{n-1}.$$

La série $\sum p(1-p)^{n-1}$ est une série géométrique de raison $1-p$ (qui est strictement inférieure à 1), donc elle converge. Par comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\mathbb{P}(X=n)$ converge également.
$\boxed{\text{Ainsi, la variable aléatoire } Y \text{ admet une espérance.}}$

Exercice 5 ⋆⋆

1. Pour $p \in \mathbb{N}$ et $\alpha > 0$, par croissance comparée, on a :
$$\frac{x^p}{e^{\alpha x}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0.$$
En particulier, il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \geqslant K$, on a $\frac{x^p}{e^{\alpha x}} \leqslant 1$, c'est-à-dire :
$$\boxed{x^p \leqslant e^{\alpha x}.}$$
2. X admet un moment d'ordre $p \in \mathbb{N}$ si et seulement si X^p admet une espérance.
α étant fixé, il existe K tel que trouvé à la question précédente. En appliquant l'inégalité à $|x|$ (si $|x| \geqslant K$), on trouve :
$$|x|^p \leqslant e^{\alpha |x|}.$$
Pour lever la condition $|x| \geqslant K$, on peut remarquer que :
$$0 \leqslant |x|^p \leqslant \max(e^{\alpha|x|}, |K|^p) \leqslant e^{\alpha|x|} + |K|^p.$$
En particulier, on trouve la même relation pour les variables aléatoires :
$$0 \leqslant |X|^p \leqslant e^{\alpha|X|} + |K|^p.$$
Le terme de droite admet une espérance (par hypothèse et car la seconde variable est certaine) donc par domination, $\boxed{|X|^p \text{ admet une espérance.}}$
Dit autrement, $\boxed{X \text{ admet des moments à tout ordre.}}$

Exercice 6 ⋆⋆

Soit X une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.

1. On commence par calculer les probabilités demandées. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a :
$$\mathbb{P}(X > n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (1-p)^{k-1} p = p(1-p)^n \frac{1}{1-(1-p)} = (1-p)^n.$$
De même, pour la probabilité conditionnelle, on a :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{[X>m]}(X > m+n) &= \frac{\mathbb{P}([X > m+n] \cap [X > m])}{\mathbb{P}(X > m)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(X > m+n)}{\mathbb{P}(X > m)} \\ &\text{(car } [X > m+n] \subset [X > m]) \\ &= \frac{(1-p)^{m+n}}{(1-p)^m} \\ &= (1-p)^n.\end{aligned}$$
D'où $\boxed{\mathbb{P}_{[X>m]}(X > m+n) = \mathbb{P}(X > n).}$
2. L'interprétation de ce résultat est en lien avec la propriété "sans mémoire" de la loi géométrique. Ce que cela signifie est que si on sait que l'événement n'est pas encore survenu après m essais, la probabilité qu'il ne se produise pas lors des n essais suivants est la même que s'il n'était pas survenu au début. En d'autres termes, peu importe combien d'essais ont déjà été faits, la probabilité que l'événement survienne reste la même pour les essais futurs.

Exercice 7 ⋆⋆

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

On souhaite vérifier que l'espérance de la variable $Y = \frac{1}{X+1}$ existe. En appliquant le théorème de transfert, il suffit pour cela de vérifier que $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k+1} \cdot \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ converge absolument. Comme Y prend des valeurs positives, il suffit en fiat de montrer la convergence usuelle.
Pour une loi de Poisson de paramètre λ, la probabilité que X prenne la valeur k est :

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$.
Ainsi, on a sous réserve de convergence :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\frac{1}{X+1}\right) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k+1} \cdot \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{(k+1)!} \\
&= \sum_{k'=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{k'-1} e^{-\lambda}}{k'!} \\
&= \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\left(\sum_{k'=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{k'}}{k'!} - 1\right) \\
&= \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\left(e^{\lambda} - 1\right) \boxed{= \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda}}
\end{aligned}$$

et la convergence est prouvée puisque c'est une série exponentielle.

Exercice 8 ⋆⋆

On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^\star$ qui possède une espérance. Pour montrer que la variable $Y = \ln(X)$ possède une espérance, nous allons utiliser une inégalité bien connue.
On sait que pour tout $x > 0$, on a :

$$\ln(x) \leq x - 1.$$

En effet, cette inégalité provient de la convexité de la fonction $-\ln$ sur $\mathbb{R}_*^+$.
En appliquant cette inégalité à la variable aléatoire X, on obtient :

$$Y = \ln(X) \leq X - 1.$$

De plus $X(\Omega) \subset \mathbb{N}^\star$. Donc $X \geqslant 1$, ce qui donne $Y \geqslant 0$. Donc par domination, $\boxed{Y \text{ admet aussi une espérance.}}$

Exercice 9 ⋆⋆

Pour une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$, la fonction génératrice est donnée par :

$$G_X(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) x^k.$$

1. Pour montrer que G_X est définie sur $[-1, 1]$, remarquons que pour tout k dans $\mathbb{N}$, $|x^k| \leq 1$ lorsque $x \in [-1, 1]$. Ainsi, chaque terme de la somme est borné par $\mathbb{P}(X = k)$ sur cet intervalle, ce qui garantit la convergence de la série sur $[-1, 1]$ car la somme des probabilités est égale à 1. $\boxed{\text{Donc, } G_X \text{ est bien définie sur } [-1, 1].}$
2. Pour $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, la probabilité de $[X = k]$ est donnée par $(1-p)^{k-1}p$ pour $k \geq 1$. La fonction génératrice devient :

$$\boxed{G_X(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (1-p)^{k-1} p x^k = \frac{p}{1-p} \sum_{k=1}^{+\infty} ((1-p)x)^k = \frac{px}{1-(1-p)x} \quad \text{pour} \quad |x| < \frac{1}{1-p}.}$$

3. Pour $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, on a $\mathbb{P}(X=k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$. La fonction génératrice devient :

$$\boxed{G_X(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}x^k=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(\lambda x)^k}{k!}=e^{-\lambda}e^{\lambda x}=e^{\lambda(x-1)}.}$$

4. Pour $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$, on a $\mathbb{P}(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$. La fonction génératrice devient :

$$\boxed{G_X(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}x^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(px)^k(1-p)^{n-k}=(px+(1-p))^n.}$$

Exercice 10 ⋆⋆⋆

On considère une variable aléatoire réelle discrète X à valeurs dans $\mathbb{N}$ admettant une espérance.
On veut étudier la convergence de $\sum_{k=0}^{+\infty}P(X>k)$. Commençons par remarquer que :

$$P(X>k)=\sum_{j=k+1}^{+\infty}P(X=j).$$

Ainsi, on cherche à montrer la convergence de la série **double** : $\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{j=k+1}^{+\infty}P(X=j)$.
Pour cela, on va étudier sa convergence absolue, en appliquant le théorème de Fubini, avec les deux sommes échangées. On va donc étudier la convergence de $\sum_{j=1}^{+\infty}\sum_{k=0}^{j-1}P(X=j)$.
La somme $\sum_{k=0}^{j-1}P(X=j)$, à termes positifs, converge (même absolument) car elle est finie. On a :

$$\sum_{k=0}^{j-1}P(X=j)=jP(X=j).$$

Puis :

$$\sum_{j=1}^{+\infty}\sum_{k=0}^{j-1}P(X=j)=\sum_{j=1}^{+\infty}jP(X=j)=\sum_{j=0}^{+\infty}jP(X=j)=\mathbb{E}(X)$$

et donc converge par hypothèse. Donc $\boxed{\text{la série de terme général } \mathbb{P}(X>k) \text{ converge}}$ et :

$$\boxed{\mathbb{E}(X)=\sum_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}(X>k).}$$

Exercice 11 ⋆⋆⋆

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$. Nous cherchons à comparer les probabilités : $\mathbb{P}(X \text{ est pair})=\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X=2k)$ et $\mathbb{P}(X \text{ est impair})=\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X=2k+1)$. Nous avons pour une loi de Poisson de paramètre λ :

$$\mathbb{P}(X=k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

La série des X pairs est :

$$\mathbb{P}(X \text{ est pair})=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{2k}e^{-\lambda}}{(2k)!}$$

et la série des X impairs est :

$$\mathbb{P}(X \text{ est impair})=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{2k+1}e^{-\lambda}}{(2k+1)!}.$$

Calculons la différence :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \text{ est pair}) - \mathbb{P}(X \text{ est impair}) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k}\mathrm{e}^{-\lambda}}{(2k)!} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k+1}\mathrm{e}^{-\lambda}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-\lambda)^{2k}\mathrm{e}^{-\lambda}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-\lambda)^{2k+1}\mathrm{e}^{-\lambda}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-\lambda)^{k}\mathrm{e}^{-\lambda}}{k!} \boxed{= \mathrm{e}^{-2\lambda} > 0.}\end{aligned}$$

On a bien $\boxed{\mathbb{P}(X \text{ est pair}) \geq \mathbb{P}(X \text{ est impair}).}$

Exercice 12 - Variables indicatrices ⋆⋆⋆

1. (a) Pour $\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$, on distingue deux cas :
   - Si $\omega \in A$, alors $\mathbb{1}_{\overline{A}}(\omega) = 0$ et $\mathbb{1}_A(\omega) = 1$. Donc on a bien $\mathbb{1}_{\overline{A}}(\omega) = 1 - \mathbb{1}_A(\omega)$.
   - Si $\omega \in \overline{A}$, alors $\mathbb{1}_{\overline{A}}(\omega) = 1$ et $\mathbb{1}_A(\omega) = 0$. Donc on a bien $\mathbb{1}_{\overline{A}}(\omega) = 1 - \mathbb{1}_A(\omega)$.

   On a donc bien $\boxed{\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A.}$

   (b) Pour $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$, distinguons quatre cas :
   - Si $\omega \in A$ et $\omega \in B$, alors $\mathbb{1}_{A\cap B}(\omega) = 1$, $\mathbb{1}_A(\omega) = 1$ et $\mathbb{1}_B(\omega) = 1$. Donc on a bien $\mathbb{1}_{A\cap B}(\omega) = \mathbb{1}_A(\omega)\mathbb{1}_B(\omega)$.
   - Si $\omega \in A$ et $\omega \notin B$, alors $\mathbb{1}_{A\cap B}(\omega) = 0$, $\mathbb{1}_A(\omega) = 1$ et $\mathbb{1}_B(\omega) = 0$. Donc on a bien $\mathbb{1}_{A\cap B}(\omega) = \mathbb{1}_A(\omega)\mathbb{1}_B(\omega)$.
   - Si $\omega \notin A$ et $\omega \in B$, alors $\mathbb{1}_{A\cap B}(\omega) = 0$, $\mathbb{1}_A(\omega) = 0$ et $\mathbb{1}_B(\omega) = 1$. Donc on a bien $\mathbb{1}_{A\cap B}(\omega) = \mathbb{1}_A(\omega)\mathbb{1}_B(\omega)$.
   - Si $\omega \notin A$ et $\omega \notin B$, alors $\mathbb{1}_{A\cap B}(\omega) = 0$, $\mathbb{1}_A(\omega) = 0$ et $\mathbb{1}_B(\omega) = 0$. Donc on a bien $\mathbb{1}_{A\cap B}(\omega) = \mathbb{1}_A(\omega)\mathbb{1}_B(\omega)$.

   On a donc bien $\boxed{\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B.}$

   (c) Pour $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B$, remarquons que $A \cup B = \overline{\overline{A} \cap \overline{B}}$. On a donc :

   $$\begin{aligned}\mathbb{1}_{A\cup B} &= \mathbb{1}_{\overline{\overline{A}\cap\overline{B}}} \\ &= 1 - \mathbb{1}_{\overline{A}\cap\overline{B}} \\ &= 1 - \mathbb{1}_{\overline{A}}\mathbb{1}_{\overline{B}} \\ &= 1 - (1 - \mathbb{1}_A)(1 - \mathbb{1}_B)\end{aligned}$$

   ce qui donne bien $\boxed{\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B.}$

2. Pour un événement A :

   $$\boxed{\mathbb{E}(\mathbb{1}_A) = 0 \times \mathbb{P}(\overline{A}) + 1 \times \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A).}$$

3. La variable $\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{A_k}$ compte le nombre d'événements A_k qui se sont réalisés.

4. **Application :**

   (a) Pour $i \in [\![1, N]\!]$, remarquons que $\overline{A_i}$ est l'événement « aucune personne ne choisit l'étage i ». Comme les choix sont indépendants, on a :

   $$\boxed{\mathbb{P}(A_i) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A_i}) = 1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^k.}$$

   (b) La variable aléatoire X peut s'exprimer comme :

   $$X = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{1}_{A_i}.$$

En utilisant la linéarité de l'espérance :

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_i}) = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{P}(A_i) = N \times \left(1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^k\right).}$$

Exercice 13 - Cauchy-Schwarz ⋆⋆⋆

1. Considérons les réels x et y. En développant $(|x| - |y|)^2$, nous obtenons :

$$(|x| - |y|)^2 = x^2 - 2|x||y| + y^2 \geq 0.$$

Ceci implique que :

$$2|x||y| \leq x^2 + y^2.$$

Et comme $|xy| = |x||y|$, on obtient :

$$\boxed{|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2).}$$

2. Les espérances $\mathbb{E}(X^2)$ et $\mathbb{E}(Y^2)$ existent puisque X et Y admettent une variance. De plus,

$$|XY| \leqslant \frac{1}{2}(X^2 + Y^2).$$

Donc par domination, $\boxed{\mathbb{E}(|XY|) \text{ existe.}}$

3. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, considérons l'expression quadratique :

$$\begin{aligned} Q(t) &= \mathbb{E}(X^2)t^2 + 2t\mathbb{E}(XY) + \mathbb{E}(Y^2) \\ &= \mathbb{E}(t^2X^2 + 2tXY + Y^2) \\ &= \mathbb{E}((tX + Y)^2). \end{aligned}$$

Comme le carré d'une variable aléatoire est toujours positif, son espérance l'est aussi, et donc $Q(t) \geq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire :

$$\boxed{\mathbb{E}(X^2)t^2 + 2t\mathbb{E}(XY) + \mathbb{E}(Y^2) \geq 0.}$$

4. Si $\mathbb{E}(X^2) = 0$, alors $X = 0$ presque sûrement, et donc $XY = 0$ presque sûrement. Cela donne :

$$\boxed{\mathbb{E}(XY)^2 = 0 \leq \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2).}$$

Si $\mathbb{E}(X^2) \neq 0$, Q est un polynôme de degré deux. Comme il est positif, il a au plus une racine et donc son discriminant est négatif (ou nul). Cela donne :

$$\begin{aligned} &\Delta \leqslant 0 \\ \Leftrightarrow\ & 4(\mathbb{E}(XY))^2 - 4\mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2) \leqslant 0 \end{aligned}$$

et on a donc bien :

$$\boxed{(\mathbb{E}(XY))^2 \leqslant \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2).}$$

Exercice 14 - Sommes de variables ⋆⋆⋆⋆⋆

C'est un exercice plus théorique qui s'approche plus de l'esprit de certains sujets d'HEC ou de Maths 2.
Considérons $x \in \mathbb{R}$. Pour montrer que X est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A})$, nous devons prouver que ***l'ensemble*** *$[X \leqslant x]$ est un événement, c'est-à-dire que c'est un élément de $\mathcal{A}$.*
Comme on le disait, c'est un exercice théorique et donc il va falloir revenir aux définitions fondamentales. Que peut-on faire ?

Il faut se rappeler que l'ensemble des événements $\mathcal{A}$ est défini par ses propriétés de stabilité par union et intersection. Le but va donc être de partir d'événements connus et de les combiner pour former $[X \leqslant x]$.
Quels sont les événements que l'on connaît ? Et bien, il faut prendre le problème dans l'autre sens : puisque les X_n sont des variables aléatoires, on sait déjà que les ensembles $[X_n \leqslant x_n]$ (où les x_n désignent des réels) sont des événements. Le but est donc de se ramener à ces événements.
Mais, il y a une difficulté technique : l'expression de X dépend de N (qui est une variable aléatoire). Pour manipuler les sommes, il serait pratique que le nombre de termes soie fixe. On va donc décomposer sur le système complet d'événements $\{[N = n]\}_{n\in\mathbb{N}^\star}$.
On a, sans présupposer la nature de l'ensemble $[X \leqslant x]$:

$$[X \leqslant x] = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left([N = n] \cap \left[\sum_{i=1}^{n} X_i \leqslant x \right] \right).$$

Pour $n \in \mathbb{N}^\star$ fixé, $[\sum_{i=1}^{n} X_i \leqslant x]$ est un événement puisque $\sum_{i=1}^{n} X_i$ est une variable aléatoire (somme finie de variables aléatoires). De même, $[N = n]$ est un événement.
Par stabilité de $\mathcal{A}$ par intersection, $[N = n] \cap [\sum_{i=1}^{n} X_i \leqslant x]$ est également un événement.
Et enfin, par stabilité de $\mathcal{A}$ par union dénombrable, $\bigcup_{n=1}^{\infty} ([N = n] \cap [\sum_{i=1}^{n} X_i \leqslant x])$ est un événement, c'est-à-dire $[X \leqslant x]$ est un événement.
Donc $\boxed{X \text{ est bien une variable aléatoire sur } (\Omega, \mathcal{A}).}$

3 Modélisation

Exercice 15 ⋆

On peut considérer que chaque lancer des deux dés est une épreuve de Bernoulli, avec un succès (les deux dés donnent le même nombre) et un échec (les deux dés donnent des nombres différents). En conséquence, X est le rang du premier succès, X suit une loi géométrique.
Pour calculer le paramètre de la loi, on peut noter D_1 et D_2 les résultats des deux dés lancés simultanément. Les deux valeurs sont indépendantes. La probabilité que les deux dés donnent le même nombre lors d'un seul lancer est donc :

$$P(D_1 = D_2) = \sum_{i=1}^{6} P([D_1 = i] \cap [D_2 = i]) = \sum_{i=1}^{6} P(D_1 = i)P(D_2 = i) = 6 \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{6}.$$

Donc :

$$\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{6}\right).}$$

On en déduite :

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\frac{1}{6}} = 6} \quad \text{et} \quad \boxed{V(X) = \frac{1 - \frac{1}{6}}{\left(\frac{1}{6}\right)^2} = 30.}$$

Exercice 16 ⋆⋆

1. Commençons par le plus simple : $\mathbb{P}(R_1)$.
   Notons P l'événement « la pièce tombe sur pile » et F l'événement « la pièce tombe sur face ». On a $F = \overline{P}$.
   D'après la formule des probabilités totales, on a :

   $$\mathbb{P}(R_1) = \mathbb{P}(P)\mathbb{P}_P(R_1) + \mathbb{P}(F)\mathbb{P}_F(R_1) = \frac{1}{3} \times \frac{4}{6} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{6} \boxed{= \frac{4}{9}.}$$

   Pour $\mathbb{P}(R_2)$, l'idée est la même :

   $$\mathbb{P}(R_2) = \mathbb{P}(P)\mathbb{P}_P(R_2) + \mathbb{P}(F)\mathbb{P}_F(R_2) = \frac{1}{3} \times \frac{4}{6} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{6} \boxed{= \frac{4}{9}.}$$

Pour $\mathbb{P}(R_1 \cap R_2)$, on remarque que si on ne sait pas si R_1 et R_2 sont indépendants, ils le sont en revanche pour les lois $\mathbb{P}_F$ et $\mathbb{P}_P$. On a donc :

$$\mathbb{P}(R_1 \cap R_2) = \mathbb{P}(P)\mathbb{P}_P(R_1 \cap R_2) + \mathbb{P}(F)\mathbb{P}_F(R_1 \cap R_2) = \frac{1}{3} \times \frac{4}{6} \times \frac{4}{6} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{6} \times \frac{2}{6} \boxed{= \frac{2}{9}.}$$

Comme $\mathbb{P}(R_1 \cap R_2) \neq \mathbb{P}(R_1)\mathbb{P}(R_2)$, $\boxed{R_1 \text{ et } R_2 \text{ ne sont pas indépendants.}}$

2. On commence par calculer :

$$\mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = \mathbb{P}(P)\mathbb{P}_P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) + \mathbb{P}(F)\mathbb{P}_F(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = \frac{1}{3} \times \left(\frac{4}{6}\right)^3 + \frac{2}{3} \times \left(\frac{2}{6}\right)^3 = \frac{10}{81}.$$

Puis :

$$\mathbb{P}_{R_1 \cap R_2}(R_3) = \frac{\mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap R_3)}{\mathbb{P}(R_1 \cap R_2)} = \frac{\frac{10}{81}}{\frac{2}{9}} \boxed{= \frac{5}{9}.}$$

3. De même, pour $n \in \mathbb{N}^\star$:

$$\mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n) = \mathbb{P}(P)\mathbb{P}_P(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n) + \mathbb{P}(F)\mathbb{P}_F(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n) = \frac{1}{3} \times \left(\frac{4}{6}\right)^n + \frac{2}{3} \times \left(\frac{2}{6}\right)^n = \frac{2^n + 2}{3^{n+1}}.$$

Puis en appliquant le théorème de Bayes :

$$\mathbb{P}_{R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n}(P) = \frac{\mathbb{P}(P)\mathbb{P}_P(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n)}{\mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n)} = \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{4}{6}\right)^n}{\frac{2^n+2}{3^{n+1}}} \boxed{= \frac{2^n}{2^n + 2}.}$$

Exercice 17 ⋆⋆

1. Notons X_1 à X_N les variables aléatoires représentant les numéros de chacun des N jetons tirés. On a donc $X = \max(X_1, \ldots, X_N)$.
Puis, pour $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \mathbb{P}(X \leqslant x) \\ &= \mathbb{P}(\max(X_1, \ldots, X_N) \leqslant x) \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{N} [X_i \leqslant x]\right) \\ &\underset{\text{indépendance}}{=} \prod_{i=1}^{N} \mathbb{P}(X_i \leqslant x) \\ &= \prod_{i=1}^{N} F_{X_i}(x). \end{aligned}$$

Les X_i suivent tous une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$, on peut donc formuelr leurs fonctions de répartitions ainsi :

$$F_{X_i}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{\lfloor x \rfloor}{n} & \text{si } x \in [1, n] \\ 1 & \text{si } x > n \end{cases}$$

puisque $\lfloor x \rfloor$ donne le nombre de nuémros entre 1 et n inférieurs à x.
Ainsi :

$$\boxed{F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \left(\frac{\lfloor x \rfloor}{n}\right)^N & \text{si } x \in [1, n] \\ 1 & \text{si } x > n \end{cases}.}$$

2. Puisque $X(\Omega) \subset [\![1, n]\!]$, il suffit de trouver $\mathbb{P}(X = k)$ pour $k \in [\![1, n]\!]$ pour caractériser entièrement la loi de X.
Soit $k \in [\![1, n]\!]$. On a :

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X \leqslant k) - \mathbb{P}(X \leqslant k-1) \boxed{= \left(\frac{k}{n}\right)^N - \left(\frac{k-1}{n}\right)^N.}$$

3. $X(\Omega)$ est fini donc X admet nécessairement une espérance. On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X = k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k \left[\left(\frac{k}{n}\right)^N - \left(\frac{k-1}{n}\right)^N\right] \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left[k\left(\frac{k}{n}\right)^N - k\left(\frac{k-1}{n}\right)^N\right] \\
&= \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \left[k\left(\frac{k}{n}\right)^N - (k-1)\left(\frac{k-1}{n}\right)^N\right]}_{=n\left(\frac{n}{n}\right)^N - 0\times\left(\frac{0}{n}\right)^N} - \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k-1}{n}\right)^N}_{=\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{j}{n}\right)^N} \\
&= \boxed{n - \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{j}{n}\right)^N.}
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\frac{\mathbb{E}(X)}{n} = 1 - \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{j}{n}\right)^N.$$

Le second terme est une somme de Riemann qui tend vers :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{j}{n}\right)^N = \int_0^1 t^N \mathrm{d}t = \frac{1}{N+1}.$$

Ainsi :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathbb{E}(X)}{n} = 1 - \frac{1}{N+1} = \frac{N}{N+1}.}$$

D'où :

$$\boxed{\mathbb{E}(X) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{nN}{N+1}.}$$

4. On a :

$$\mathbb{E}(X) = n - \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{j}{n}\right)^N.$$

À n fixé, lorsque N tend vers $+\infty$, le nombre de termes dans cette expression est fixé. On peut donc faire la limite terme à terme.
Comme $j \in [\![0, n-1]\!]$, on a $0 \leqslant \frac{j}{n} < 1$. Ainsi : $\left(\frac{j}{n}\right)^N \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$.
Puis :

$$\boxed{\lim_{N\to+\infty} \mathbb{E}(X) = n.}$$

C'est attendu puisque plus il y a d'urnes dans lesquelles on tire, plus il y a de chances de tirer, au moins une fois, un grand nombre. Pour $N \to +\infty$, on est même quasi-certain de tirer au moins une fois le jeton n. Comme on regarde le maximum obtenu, il est naturel que son espérance tende vers n lorsque $N \to +\infty$.

Exercice 18 ⋆⋆

X est le rang du premier succès, où le succès est « faire face ». X suit donc une loi géométrique $\mathcal{G}(1-p)$.
On a donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \text{ pair}) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = 2k) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} (1-p)p^{2k-1} \\ &= \frac{1-p}{p} \sum_{k=0}^{+\infty} (p^2)^k\end{aligned}$$

Comme $p < 1$ (si $p = 1$, la pièce ne tombe jamais sur face presque sûrement), cela donne :

$$\boxed{\mathbb{P}(X \text{ pair}) = \frac{1-p}{p} \times \frac{1}{1-p^2} = \frac{1}{1+p}.}$$

Exercice 19 ⋆⋆

1. On sait qu'il y a j clients. Dans ce cas, X représente le nombre de succès (pour le voleur en tout cas) dans une répétition de j épreuves de Bernoulli de paramètre p. $\boxed{\text{Sachant } [N = j],\ X \text{ suit donc une loi binomiale } \mathcal{B}(j, p).}$
2. L'ensemble $\{[N = j]\}_{j \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements.
   On a $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$. On va chercher à calculer $\mathbb{P}(X = k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = k) &= \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N = j)\mathbb{P}_{[N=j]}(X = k) \\ &= \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\lambda^j e^{-\lambda}}{j!} \times \underbrace{\binom{j}{k}}_{=0 \text{ si } j<k} p^k (1-p)^{j-k} \\ &= e^{-\lambda} \left(\frac{p}{1-p}\right)^k \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{j!}{(k!)(j-k)!} \times \frac{\lambda^j}{j!}(1-p)^j \\ &= e^{-\lambda} \left(\frac{p}{1-p}\right)^k \frac{1}{k!} \sum_{j'=0}^{+\infty} \frac{(\lambda(1-p))^{j'+k}}{j'!} \\ &= e^{-\lambda} \left(\frac{p}{1-p}\right)^k \frac{(\lambda(1-p))^k}{k!} e^{\lambda(1-p)} \boxed{= \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda p}.}\end{aligned}$$

   Donc X suit une loi de Poisson de paramètre λp.
   Ainsi on a aussi $\boxed{\mathbb{E}(X) = \lambda p}$ et $\boxed{V(X) = \lambda p.}$

Exercice 20 ⋆⋆

1. Notons X le numéro du sac choisi. Notons Y la variable qui vaut 1 si le jeton est gagnant et 0 sinon.
   La loi de X est une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. La loi de Y sachant $[X = i]$ est une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{i}{n+1}$.
   Ainsi, comme $\{[X = i]\}_{i \in [\![1,n]\!]}$ est un système complet d'événements, on a :

$$\mathbb{P}(Y = 1) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \times \frac{i}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} i}_{=\frac{n(n+1)}{2}} \boxed{= \frac{1}{2}.}$$

Cela pouvait se présentir en constatant qu'il y a autant de jetons gagnants dans le sac i que de perdants dans le sac $n-i+1$.

2. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Appliquons le théorème de Bayes :

$$\mathbb{P}_{[Y=1]}(X=k) = \frac{\mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}_{[X=k]}(Y=1)}{\mathbb{P}(Y=1)} = \frac{\frac{1}{n} \times \frac{k}{n+1}}{\frac{1}{2}} \boxed{= \frac{2k}{n(n+1)}.}$$

Exercice 21 - Le concierge alcoolique ⋆⋆

1. Distinguons les deux cas :
   - **Avec remise :** chaque tirage de clef est indépendant. X est le rang de premier succès dans une répétition d'épreuves de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{10}$. Donc $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{10}\right).}$
   - **Sans remise :** sans remise, les tirages s'influencent (puisque les le résultat précédent détermine les clefs restantes). En revanche, on sait que nécessairement $X(\Omega) \subset [\![1, 10]\!]$.
   On a :
   $$\mathbb{P}(X \leqslant 1) = \frac{1}{10}.$$
   Puis pour $i \in [\![1, 9]\!]$, on a :
   $$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \leqslant i+1) &= \mathbb{P}(X \leqslant i) + \mathbb{P}(X = i+1) \\ &= \mathbb{P}(X \leqslant i) + \mathbb{P}(X > i)\mathbb{P}_{[X>i]}(X = i+1) \\ &= \mathbb{P}(X \leqslant i) + (1 - \mathbb{P}(X \leqslant i))\frac{1}{10-i}. \end{aligned}$$
   On peut résoudre explicitement mais il suffit de constater que :
   $$\frac{i}{10} + \left(1 - \frac{i}{10}\right)\frac{1}{10-i} = \frac{i+1}{10}.$$
   Donc pour tout $i \in [\![1, 10]\!]$, on a :
   $$\mathbb{P}(X \leqslant i) = \frac{i}{10}.$$
   Donc $\boxed{X \text{ suit une loi uniforme sur } [\![1, 10]\!].}$

   On aurait pu le voir en constatant qu'il n'y a pas de raisons particulière que la bonne clef soit la première ou la dernière essayée.

2. (a) On connaît la loi de X sachant que le concierge est ivre et la loi de X sachant que le concierge est sobre. Chacune de ces lois admet une espérance. On peut donc utiliser la formule de l'espérance totale.
   Comme $X > 0$, il suffit de vérifier la convergence simple, qui sera immédiate puisque la somme est finie.
   On a :
   $$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \mathbb{P}(\text{ivre})\mathbb{E}(X|\text{ivre}) + \mathbb{P}(\text{sobre})\mathbb{E}(X|\text{sobre}) \\ &= \frac{1}{3} \times 10 + \frac{2}{3} \times \frac{1+10}{2} \boxed{= 7.} \end{aligned}$$

   (b) Appliquons la théorème de Bayes :
   $$\begin{aligned} \mathbb{P}_{[X=6]}(\text{ivre}) &= \frac{\mathbb{P}(\text{ivre})\mathbb{P}_{[\text{ivre}]}(X=6)}{\mathbb{P}(X=6)} \\ &= \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{10}\left(1 - \frac{1}{10}\right)^{6-1}}{\frac{1}{3} \times \frac{1}{10}\left(1 - \frac{1}{10}\right)^{6-1} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{10}} \\ &= \boxed{\frac{9^5}{9^5 + 2 \times 10^5} \simeq 0,228.} \end{aligned}$$

(c) On a clairement $\boxed{\mathbb{P}_{[X=11]}(\text{ivre}) = 1}$ puisque l'univers image de X sachant que le concierge est sobre est $[\![1, 10]\!]$.

Exercice 22 ⋆⋆⋆

1. On a clairement $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{6}\right).}$

2. De même, sachant $[X = k]$, $\boxed{\text{la loi de } Y \text{ est une loi géométrique (premier rang de succès) } \mathcal{G}\left(\frac{1}{k+1}\right).}$

3. Y admet une espérance conditionnelle sachant $[X = k]$ pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$ puisque c'est une loi géométrique. Puisque $Y = |Y|$, la série suivante est l'espérance de Y pour peu qu'elle converge :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k)\mathbb{E}(Y|X = k) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{6}\right)^{k-1} (k+1) \\
&= \frac{1}{6}\left[\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} + \underbrace{\sum_{k'=0}^{+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{k'}}_{k'=k-1}\right] \\
&\quad \text{(convergent car géométriques et géométriques dérivées de raison} < 1) \\
&= \frac{1}{6}\left[\frac{1}{(1-\frac{5}{6})^2} + \frac{1}{1-\frac{5}{6}}\right] \boxed{= 7.}
\end{aligned}$$

4. Sans remise, la loi de Y sachant $[X = k]$ devient une loi uniforme sur $[\![1, k+1]\!]$ (voir exercice précédent). On a donc de manière similaire :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k)\mathbb{E}(Y|X = k) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{6}\right)^{k-1} \frac{1+(k+1)}{2} \\
&= \frac{1}{12}\left[\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} + \underbrace{\sum_{k'=0}^{+\infty} 2\left(\frac{5}{6}\right)^{k'}}_{k'=k-1}\right] \\
&\quad \text{(convergent car géométriques et géométriques dérivées de raison} < 1) \\
&= \frac{1}{12}\left[\frac{1}{(1-\frac{5}{6})^2} + \frac{2}{1-\frac{5}{6}}\right] \boxed{= 4.}
\end{aligned}$$

Exercice 23 ⋆⋆⋆

1. Commençons par remarquer que $X_1(\Omega) \subset [\![1, n]\!]$.
   Cherchons donc à calculer pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ la quantité $\mathbb{P}(X_1 = k)$.
   Notons pour cela, A_k l'événement « la boule de numéro maximum est obtenue au $k^{\text{ème}}$ tirage ». On a :

$$[X_1 = k] = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_{k-1}} \cap A_k.$$

Avec la formule des probabilités composées, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1 = k) &= \mathbb{P}(\overline{A_1})\mathbb{P}_{\overline{A_1}}(\overline{A_2})\cdots\mathbb{P}_{\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\overline{A_{k-2}}}(\overline{A_{k-1}})\mathbb{P}_{\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\overline{A_{k-1}}}(A_k)\\ &= \frac{n-1}{n}\times\frac{n-2}{n-1}\times\cdots\times\frac{n-(k-2)-1}{n-(k-2)}\times\frac{1}{n-(k-1)}\boxed{=\frac{1}{n}.}\end{aligned}$$

$\boxed{X_1 \text{ suit donc une loi uniforme } \mathcal{U}(\llbracket 1,n\rrbracket).}$ On a donc :

$$\boxed{\mathbb{E}(X_1) = \frac{n+1}{2}} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathbb{V}(X_1) = \frac{n^2-1}{12}.}$$

2. Pour cette question, on peut aller plus vite. Si on a $[X_1 = i]$, cela veut dire qu'il reste à la fin de la première expérience $n-i$ boules dans l'urne, à condition tout de même que $n-i\neq 0$. Avec exactement le même raisonnement qu'à la question précédente, $\boxed{X_2 \text{ suit, dans ce cas, une loi uniforme } \mathcal{U}(\llbracket 1,n-i\rrbracket).}$

   Si $i = n$ alors $X_2 = 0$ d'après l'énoncé, $\boxed{\text{c'est une variable certaine.}}$
3. Toutes les variables sont finis, donc il n'y a aucun problème de convergence.

   Avec le système complet d'événements $\{[X_1 = i]\}_{i\in\llbracket 1,n\rrbracket}$, en appliquant la formule de l'espérance totale, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_2) &= \sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(X_1=i)\underbrace{\mathbb{E}(Y_2|X_1=i)}_{=0 \text{ si } i=n}\\ &= \sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{n}\frac{1+n-i}{2}\\ &= \frac{(1+n)(n-1)}{2n} - \frac{1}{2n}\underbrace{\sum_{i=1}^{n} i}_{=\frac{(n-1)n}{2}}\boxed{=\frac{(n-1)(n+2)}{4n}}\end{aligned}$$

Et de manière similaire, pour $k\in\llbracket 1,n-1\rrbracket$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_2 = k) &= \sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(X_1=i)\underbrace{\mathbb{P}_{[X_1=i]}(Y_2=k)}_{=0 \text{ si } k+i>n}\\ &= \sum_{i=1}^{n-k}\frac{1}{n}\frac{1}{n-i}\boxed{=\frac{1}{n}\sum_{j=k}^{n-1}\frac{1}{j}.}\end{aligned}$$

Pour $k = 0$, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_2 = 0) &= \sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(X_1=i)\underbrace{\mathbb{P}_{[X_1=i]}(Y_2=0)}_{=0 \text{ si } i\neq n}\\ &= \mathbb{P}(X_1=n)\boxed{=\frac{1}{n}.}\end{aligned}$$

Exercice 24 ⋆⋆⋆

1. On note P_i l'événement « le $i^{\text{ème}}$ lancer donne pile » et F_i l'événement contraire.

   On a $X(\Omega)\subset\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$. Pour $n\geqslant 2$, on a :

$$[X=n] = \bigcup_{i=1}^{n-1}\left(F_1\cap\cdots\cap F_{i-1}\cap P_i\cap F_{i+1}\cap\cdots\cap F_{n-1}\cap P_n\right)$$

l'union étant disjointe. Donc :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=n) &= \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}\left(F_1 \cap \cdots \cap F_{i-1} \cap P_i \cap F_{i+1} \cap \cdots \cap F_{n-1} \cap P_n\right) \\
&\underset{\text{indépendance}}{=} \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(F_1)\cdots\mathbb{P}(F_{i-1})\mathbb{P}(P_i)\mathbb{P}(F_{i+1})\cdots\mathbb{P}(F_{n-1})\mathbb{P}(P_n) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} (1-p)^{i-1}p(1-p)^{n-1-i}p \boxed{= (n-1)p^2(1-p)^{n-2}.}
\end{aligned}$$

2. Sachant $[X=n]$, Y suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, 1-p)$. Donc $\mathbb{E}(Y|[X=n]) = n(1-p)$.
   On va appliquer la formule de l'espérance totale. Comme $Y \geqslant 0$, la convergence usuelle (plutôt que absolue) suffit. On a, sous réserve de convergence :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) = \sum_{n=2}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n)\mathbb{E}(Y|[X=n]) \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1)p^2(1-p)^{n-2} \times n(1-p) \\
&= p^2(1-p)\underbrace{\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)(1-p)^{n-2}}_{=\frac{2}{(1-(1-p))^3}} \boxed{= \frac{2(1-p)}{p}.}
\end{aligned}$$

4 Exercices de concours

Exercice 25 - ESCP (modifié) ⋆⋆

D'après le théorème de transfert, α^X admet une espérance si :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n \mathbb{P}(X=n)$$

converge absolument. Comme $\alpha \in [0,1]$, on a $|\alpha^n| \leqslant 1$ pour tout n. Donc :

$$0 \leqslant |\alpha^n \mathbb{P}(X=n)| \leqslant \mathbb{P}(X=n).$$

Or la série des $\mathbb{P}(X=n)$ converge (vers 1). Par comparaison de séries à termes positifs, la série des $|\alpha^n \mathbb{P}(X=n)|$ converge et donc la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n \mathbb{P}(X=n)$ converge absolument.
Ainsi $\boxed{\alpha^X \text{ admet une espérance.}}$

Exercice 26 - Oral ESCP 1999 ⋆⋆⋆⋆

1. N est le rang du succès « le jeu s'arrête » qui a une probabilité $\frac{1}{3}$. Donc $\boxed{N \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{3}\right)}$ c'est-à-dire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \mathbb{P}(N=n) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}.$$

2. Si $N=n$, le joueur a tiré $n-1$ fois des cœurs. Notons Y le nombre de roi qu'il a tiré. Il s'agit du compte du nombre du succès « tirer un roi » qui, sachant qu'un cœur est tiré à chaque fois, a une probabilité $\frac{1}{2}$. Donc Y suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n-1, 1/2)$.
   Or $X = 2Y + (N-1-Y) = Y + (N-1)$ puisque 2 euros sont gagnés pour chaque roi et 1 euro est gagné pour chaque as (qui sont les $N-1-Y$ cartes restantes).

Pour $N = n$, on a $X = Y + (n-1)$ et donc la loi de X est une loi binomiale *translatée* :

$$\begin{aligned}\forall k \in [\![n-1, 2(n-1)]\!],\ \mathbb{P}_{N=n}(X=k) &= \mathbb{P}_{N=n}(Y = k-n+1)\\ &= \binom{n-1}{k-n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1-(k-n+1)}\\ &= \boxed{\binom{n-1}{k-n+1}\frac{1}{2^{n-1}}.}\end{aligned}$$

3. Il faut que le coût d'entrer soit supérieur à l'espérance des gains. Ainsi le prix minimum pour être rentable est $\mathbb{E}(X)$. Comme tout est positif, sous réserve de convergence usuelle (plutôt que absolue), on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(N=n)\mathbb{E}(X|N=n)\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\underbrace{\mathbb{E}(Y+N-1|N=n)}_{=\frac{n-1}{2}+n-1}\\ &= \frac{1}{2}\left[\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \sum_{n'=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n'}\right]\\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(1-\frac{2}{3})^2} - \frac{1}{1-\frac{2}{3}}\right]\boxed{=3.}\end{aligned}$$

Exercice 27 - QSP HEC ECE 2014 ⋆⋆⋆⋆

Notons X la variable aléatoire qui vaut i si la boule bleue est dans l'urne numéro i.
Notons R_1 l'événement « la première boule tirée dans l'urne U_1 est rouge ». Et notons R_2 : « la seconde boule tirée dans l'urne U_1 est rouge ».
On cherche donc à calculer $\mathbb{P}_{R_1\cap R_2}(X=2)$.
Il est *a priori* plus simple de calculer les probabilités si on sait où se trouve la boule bleue. Cela pousse à utiliser le théorème de Bayes :

$$\mathbb{P}_{R_1\cap R_2}(X=2) = \frac{\mathbb{P}_{X=2}(R_1\cap R_2)\mathbb{P}(X=2)}{\mathbb{P}(R_1\cap R_2)}.$$

On a clairement $\mathbb{P}_{X=2}(R_1\cap R_2) = 1$ puisque si la boule bleue est dans l'urne U_2, toutes les boules tirées de U_1 seront rouges.
L'énoncé n'est pas très clair sur la distribution de probabilités pour le placement de la boule bleue, mais il est raisonnable de le modéliser par $\mathbb{P}(X=2) = \frac{1}{n}$ (avec une loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$ pour X).
Il nous reste à traiter le dénominateur. On utilise le fait que $\{[X=i]\}_{i\in[\![1,n]\!]}$ est un système complet d'événement et la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(R_1\cap R_2) &= \sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(X=i)\underbrace{\mathbb{P}_{[X=i]}(R_1\cap R_2)}_{=1 \text{ si } i\neq 1}\\ &= \underbrace{\mathbb{P}(X=1)}_{=\frac{1}{n}}\mathbb{P}_{[X=1]}(R_1\cap R_2) + \sum_{i=2}^{n}\underbrace{\mathbb{P}(X=i)}_{=\frac{1}{n}}.\end{aligned}$$

Et on peut utiliser la formule des probabilités composées pour :

$$\mathbb{P}_{[X=1]}(R_1\cap R_2) = \underbrace{\mathbb{P}_{[X=1]}(R_1)}_{=\frac{2}{3}}\underbrace{\mathbb{P}_{[X=1]\cap R_1}(R_1\cap R_2)}_{=\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$$

La formule des probabilités composées ne s'appliquent pas a priori pour des probabilités conditionnelles, en tout cas telle que formulée dans le programme. Mais, il faut se souvenir que les probabilités conditionnelles sont des probabilités et donc tous les théorèmes sur les probabilités s'appliquent.
Dit autrement, la formule précédente est une application des probabilités composées dans l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}_{[X=1]})$.

Donc :

$$\mathbb{P}(R_1 \cap R_2) = \frac{1}{3n} + \frac{n-1}{n}$$

puis :

$$\mathbb{P}_{R_1 \cap R_2}(X=2) = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{3n} + \frac{n-1}{n}} = \frac{3}{1+3(n-1)} \boxed{= \frac{3}{3n-2}.}$$

Exercice 28 - QSP HEC 2016 ⋆⋆⋆⋆⋆

1. On a $\mathbb{V}(X) \geqslant 0$. Or $V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = 1 - \alpha^2$. Donc $1 - \alpha \geqslant 0$, ce qui est équivalent à $\boxed{\alpha \in [-1, 1].}$
2. On a $\mathbb{V}(X^2) = \mathbb{E}(X^4) - \mathbb{E}(X^2)^2 = 1 - 1^2 = 0$. Donc X^2 est une variable certaine. Comme $\mathbb{E}(X^2) = 1$, on a donc $X^2 = 1$ presque sûrement.
   Ainsi $X(\Omega) \subset \{-1, 1\}$.
   Notons $p = \mathbb{P}(X = 1)$. On a donc $\mathbb{P}(X = -1) = 1 - p$. On a :

   $$\alpha = \mathbb{E}(X) = p - (1-p) = 2p - 1.$$

   Donc la loi de X est donnée par :

   $$\boxed{\mathbb{P}(X=1) = \frac{1+\alpha}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X=-1) = \frac{1-\alpha}{2}.}$$