TD3 - Compléments d'algèbre linéaire

1 Espaces et sous-espaces vectoriels

Exercice 1 ⋆

1. Soit (e_1, e_2, e_3) une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$. Montrer que (e_1, e_3) est libre.
2. Soit E un espace vectoriel et soient u, v et w trois vecteurs deux à deux non colinéaires. La famille (u, v, w) est-elle nécessairement libre ?
3. Soit (e_1, e_2, e_3) une famille libre d'un espace vectoriel E. Les familles (e_1, e_2+e_1, e_2+e_3) et $(e_1, e_2, 2e_3)$ sont-elles libres ?

Exercice 2 ⋆

Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels, en déterminer une base et la dimension :

$$\begin{aligned}
E &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y = 0\},\\
F &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 5y - 3z = 0\\
&\qquad \text{et } -x - 4y + 2z = 0\},\\
G &= \{\ P \in \mathbb{R}_2[X] \mid (X-1)P' - XP'' = 2P\}\\
H &= \{M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \mid MN = NM\}\\
&\qquad \text{où } N = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \text{ avec } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \text{ fixés.}
\end{aligned}$$

Exercice 3 ⋆

Soit $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + 2z - t = 0\}$ et $G = \mathrm{Vect}((1,1,1,1))$. Montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 4 ⋆⋆

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les sous-espaces vectoriels suivants :

$$\begin{aligned}
F &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0\\
&\qquad \text{et } x - 2y + 3z - 5t = 0\},\\
G &= \mathrm{Vect}((1,-2,0,2),(0,0,1,3)).
\end{aligned}$$

1. Montrer que $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$.
2. Trouver une base (e_1, e_2, e_3, e_4) de E telle que $\{e_1, e_2\} \subset F$ et $\{e_3, e_4\} \subset G$.
3. Exprimer les coordonnées d'un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^4$ dans cette base.

Exercice 5 ⋆⋆

Soient $F = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+) \mid f(0) = f'(0) = 0\}$ et $G = \{x \mapsto ax + b,\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$.

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+)$.
2. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+)$.
3. Soit $f : x \mapsto \frac{\ln(1+2x)}{x}$. Montrer que $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+)$ et déterminer la décomposition de f dans $F \oplus G$.

Exercice 6 ⋆⋆

Dans $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, on considère les deux sous-ensembles suivants :

$$\begin{aligned}
F &= \left\{ \begin{pmatrix} a & 2a+b \\ -b & -a \end{pmatrix},\ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\},\\
G &= \left\{ \begin{pmatrix} a & 3a+b \\ -b & -2a+b \end{pmatrix},\ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.
\end{aligned}$$

1. Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ et en déterminer une base.
2. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 7 ⋆⋆

Dans $\mathbb{R}_4[X]$, on pose :

$$\begin{aligned}
F &= \{P \in \mathbb{R}_4[X] \mid P(0) = 0\},\\
G &= \{P \in \mathbb{R}_4[X] \mid P(4) = 0\},\\
H &= F \cap G.
\end{aligned}$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$ et en donner une base.
2. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$ et en donner une base formée de puissance de $(X-4)$.
3. Montrer que $H = \{X(X-4)Q \mid Q \in \mathbb{R}_2[X]\}$. En déduire une base de H.

Exercice 8 ⋆⋆⋆

Soit $F = \{f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) = f(1)\}$.

1. Montrer que F est un espace vectoriel.

2. Soit $g : x \mapsto x$. Montrer que F et $G = \mathrm{Vect}(g)$ sont supplémentaires dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 9 ⋆⋆⋆⋆

Soit $n \geq 1$ fixé. Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, on pose :

$$F_i = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid \forall j \in [\![0, n]\!] \setminus \{i\},\ P(j) = 0\}.$$

1. Montrer que les F_i sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_n[X]$ et que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a $P \in F_i$ si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $P = \lambda \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (X - j)$.
2. Montrer que la somme $F_0 + F_1 + F_2 + \ldots + F_n$ est directe.
3. En déduire que $\mathbb{R}_n[X] = \bigoplus_{i=0}^{n} F_i$.

2 Applications linéaires

Exercice 10 ⋆

Soit E un espace vectoriel et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$E_\lambda(f) = \{x \in E \mid f(x) = \lambda x\}$$

est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 11 - Vrai ou faux ⋆⋆

Vrai ou faux ? Justifier.
Soient E et F deux espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est libre alors $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est libre.
2. Si $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est libre alors $(e_1, \ldots, e_n)$ est libre.
3. Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est génératrice alors $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est génératrice.
4. Si $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est génératrice alors $(e_1, \ldots, e_n)$ est génératrice.
5. Si $\mathrm{Im}(f) = F$ alors f est injective.
6. Si $\mathrm{Im}(f) = F$ et $\dim(F) = \dim(E)$ alors f est injective.
7. Si g est une autre application linéaire de E dans F avec $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(g)$ et $\ker(f) = \ker(g)$ alors $f = g$.

Exercice 12 - À savoir faire ! ⋆⋆

Soient E, F et G trois espaces vectoriels. Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Montrer que :

$$g \circ f = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) \subset \ker(g).$$

Exercice 13 ⋆⋆

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et soit φ une forme linéaire non nulle sur E. Montrer que pour tout $u \notin \ker(\varphi)$, $E = \ker(\varphi) \oplus \mathrm{Vect}(u)$.

Exercice 14 - Polynômes de Lagrange ⋆⋆

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, \ldots, a_n$ $n+1$ réels deux à deux distincts. On considère l'application :

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \mapsto & (P(a_0), \ldots, P(a_n)) \end{array} \right. .$$

1. Montrer que φ est linéaire.
2. Montrer que φ est un isomorphisme.
3. Pour $i \in [\![0, n]\!]$, on pose :

$$L_i = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}.$$

   (a) Calculer $\varphi(L_i)$.
   (b) En déduire que $(L_0, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 15 ⋆⋆

Soit E un espace vectoriel et soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ deux endomorphismes qui commutent (c'est-à-dire $f \circ g = g \circ f$).

1. Montrer que $\ker(f)$ est stable par g.
2. Montrer que $\mathrm{Im}(f)$ est stable par g.

Exercice 16 ⋆⋆

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E. On suppose que l'endomorphisme f vérifie $f^3 = f$. Montrer que $E = \ker(f) \oplus \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \mathrm{Id}_E)$.

Exercice 17 - Symétries ⋆⋆⋆

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. On dit qu'un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est une symétrie si $f^2 = \mathrm{Id}_E$.

1. Soit p un projecteur de E.
   (a) Montrer que $\mathrm{Im}(p) = \ker(p - \mathrm{Id}_E)$.
   (b) Montrer que $2p - \mathrm{Id}_E$ est une symétrie.
2. On suppose dans cette question que $g \in \mathcal{L}(E)$ est une symétrie.
   (a) Montrer que $\frac{1}{2}(g + \mathrm{Id}_E)$ est un projecteur.
   (b) En déduire que $\ker(g - \mathrm{Id})$ et $\ker(g + \mathrm{Id}_E)$ sont supplémentaires dans E.

Exercice 18 - Projecteurs associés ⋆⋆⋆

Soient p et q deux projecteurs d'un espace vectoriel E tels que $p + q = \mathrm{Id}_E$. Montrer que $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Im}(q)$.

Exercice 19 ⋆⋆⋆

Soient E, F et G trois espaces vectoriels de dimension finie. Et soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$.

1. Montrer que $\mathrm{rg}(g \circ f) \leq \mathrm{rg}(g)$.
2. Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de $\mathrm{Im}(f)$. Montrer que $(g(e_1), \ldots, g(e_p))$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(g \circ f)$. En déduire que $\mathrm{rg}(g \circ f) \leq \mathrm{rg}(f)$.
3. Montrer que $\mathrm{rg}(g \circ f) \leq \min(\mathrm{rg}(g), \mathrm{rg}(f))$.

Exercice 20 ⋆⋆⋆

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 + f - 6\mathrm{Id}_E = 0$. On pose alors $u = f + 3\mathrm{Id}_E$ et $v = f - 2\mathrm{Id}_E$.

1. Montrer que f est un isomorphisme et déterminer une expression de f^{-1} en fonction de f et Id_E.
2. Montrer qu'il existe deux suites (α_n) et (β_n) telles que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ f^n = \alpha_n f + \beta_n \mathrm{Id}_E.$$
   En déduire une expression de f^n en fonction de f, Id_E et n.
3. Calculer $u - v$. En déduire que $E = \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v)$.
4. Calculer $u \circ v$ et $v \circ u$. En déduire que $\mathrm{Im}(u) \subset \ker(v)$ et $\mathrm{Im}(v) \subset \ker(u)$.
5. Montrer que $E = \ker(u) \oplus \ker v$.

Exercice 21 ⋆⋆⋆

Soient E un espace vectoriel, $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que p et f commutent si et seulement si $\ker(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont stables par f.

Exercice 22 ⋆⋆⋆

Soit E un espace vectoriel de dimension $n > 1$. Soit f un endomorphisme de E tel que $f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $f^{n-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$. Soit x un vecteur de E tel que $f^{n-1}(x) \neq 0_E$. Montrer que la famille $(x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x))$ est une base de E.

Exercice 23 ⋆⋆⋆

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Pour tout entier i de $[\![1, n]\!]$, p_i désigne un projecteur de E. On suppose que pour tout couple $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2 : i \neq j \Rightarrow p_i \circ p_j = 0$. Montrer que la somme $\mathrm{Im}(p_1) + \ldots + \mathrm{Im}(p_n)$ est directe.

3 Exercices de concours

Exercice 24 - HEC 2018 (modifié) ⋆⋆

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et soit φ une forme linéaire non nulle sur E.

1. Montrer que pour tout $u \notin \ker(\varphi)$, on a $E = \ker(\varphi) \oplus \mathrm{Vect}(u)$.
2. Soit ψ une autre forme linéaire non nulle sur E. Montrer que φ et ψ sont proportionnelles si et seulement si $\ker(\varphi) = \ker(\psi)$.

Exercice 25 - QSP ESCP 2004 ⋆⋆⋆⋆

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soient f et g deux endomorphismes de E tels que $E = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$ et $E = \ker(f) + \ker(g)$. Montrer que ces sommes sont directes.

Exercice 26 - Oral ESCP 2012 ⋆⋆⋆⋆⋆

Dans tout cet exercice, n désigne un entier naturel non nul et $(a_1, \dots, a_n)$ une famille de nombres réels distincts. Pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, on note :

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} .$$

1. (a) Soit $i \in [\![1,n]\!]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $L_i \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $L_i(a_j) = \delta_{i,j}$.
   (b) Montrer que la famille $(L_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est une base $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
2. Soit $\pi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ définie pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ par $\pi(P) = \sum_{i=1}^n P(a_i)L_i$.
   (a) Montrer que π est un projecteur de $\mathbb{R}[X]$.
   (b) Déterminer le noyau et l'image de π.
   (c) On note :
   $$F = \left\{ Q \prod_{i=1}^n (X - a_i),\ Q \in \mathbb{R}[X] \right\}.$$
   Montrer que $F \oplus \mathbb{R}_{n-1}[X] = \mathbb{R}[X]$.
   (d) Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base $(L_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$.
3. On pose :
   $$\epsilon : \begin{cases} \mathbb{R}_{n-1}[X] & \to & \mathbb{R}^n \\ P & \mapsto & (P(a_i))_{i\in[\![1,n]\!]} \end{cases} .$$
   (a) Montrer que ϵ est un isomorphisme.
   (b) Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $P(a_i) = f(a_i)$, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$.

   Ce polynôme s'appelle le polynôme d'interpolation de Lagrange associé à la fonction f aux points $(a_1, \dots, a_n)$.
4. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Soient $f \in \mathcal{C}^n([a,b],\mathbb{R})$ et $a_1, a_2, \dots, a_n$ tels que $a \leq a_1 < \dots < a_n \leq b$ et P le polynôme d'interpolation de Lagrange associé à f et aux points $(a_1, \dots, a_n)$.
   (a) Soient $x \in [a,b] \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$ et K réel. On définit la fonction φ par :
   $$\varphi : \begin{cases} [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & f(t) - P(t) - K\prod_{i=1}^n (t - a_i) \end{cases} .$$
   Montrer qu'il existe K tel que $\varphi(x) = 0$.
   (b) Montrer que pour cette valeur de K, il existe $\zeta \in [a,b]$ tel que $\varphi^{(n)}(\zeta) = 0$.
   (c) Montrer que pour tout $x \in [a,b]$, on a :
   $$|f(x) - P(x)| \leq \frac{\prod_{i=1}^n |x - a_i|}{n!} \sup_{[a,b]} |f^{(n)}|.$$

Exercice 27 - Oral ESCP 2019 ⋆⋆⋆⋆⋆

Soit E un espace vectoriel de dimension n où $n \geq 2$. On note $\mathcal{L}(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes de E.

1. Soit u un endomorphisme de E. Le but de cette question est de montrer qu'il existe un endomorphisme w de E tel que $u = u \circ w \circ u$. On note r le rang de u.
   (a) Traiter les cas $r = 0$ et $r = n$.
   (b) On suppose maintenant que $r \in [\![1, n-1]\!]$.
      i. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E telle que la famille $(u(e_1), \dots, u(e_r))$ soit libre et telle que, pour tout entier $i \in [\![r+1, n]\!]$, $u(e_i) = 0$.
      ii. En déduire l'existence de w.
2. Pour tout endomorphisme f de E, on note Φ_f l'endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ défini par :
   $$\forall g \in \mathcal{L}(E),\ \Phi_f(g) = f \circ g - g \circ f.$$
   On suppose que f est nilpotent, c'est-à-dire qu'il existe un entier $p \in \mathbb{N}^\star$ tel que $f^p = 0$.
   (a) Montrer par récurrence sur $m \in \mathbb{N}^\star$ que, pour tout endomorphisme g de E, on a :
   $$(\Phi_f)^m(g) = \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} f^{m-k} \circ g \circ f^k.$$
   (b) Montrer que Φ_f est nilpotent.
3. Montrer que $f^{p-1} \in \operatorname{Im}\left((\Phi_f)^{2p-2}\right)$.
4. Préciser l'indice de nilpotence de Φ_f, c'est-à-dire le plus petit entier q tel que $(\Phi_f)^q = 0$.