TD3 - Compléments d'algèbre linéaire - Correction

1 Espaces et sous-espaces vectoriels

Exercice 1 ⋆

1. (e_1, e_2, e_3) est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$ de cardinal 3. Par égalité des dimensions, elle est également libre. Toute sous-famille d'une famille libre est libre, donc $\boxed{(e_1, e_3) \text{ est libre.}}$
2. $\boxed{\text{Non.}}$ Ainsi, $u = (1, 0)$, $v = (0, 1)$ et $w = (1, 1)$ tous pris dans $\mathbb{R}^2$ forment un contre-exemple.
3. Oui. Vérifions-le rapidement.
   Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 e_1 + \lambda_2(e2 + e_1) + \lambda_3(e_2 + e_3) = 0$. On a alors :
   $$(\lambda_1 + \lambda_2)e_1 + (\lambda_2 + \lambda_3)e_2 + \lambda_3 e_3 = 0.$$
   Comme (e_1, e_2, e_3) est libre, on a donc :
   $$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 & = & 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_3 = 0. \end{cases}$$
   La résolution est immédiate et on trouve bien $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ donc $\boxed{(e_1, e_1 + e_2, e_2 + e_3) \text{ est libre.}}$
   Le même raisonnement (avec des calculs encore plus simples) permet de montrer que $\boxed{(e_1, e_2, 2e_3) \text{ est libre.}}$

Exercice 2 ⋆

- $E = \ker \varphi$ avec $\varphi : (x, y, z) \mapsto x + 2y$. En effet pour tout (x, y, z) et tout (x', y', z') et tout λ, on a :
  $$\varphi(x + \lambda x', y + \lambda y', z + \lambda z') = (x + \lambda x') + 2(y + \lambda y') = (x + 2y) + \lambda(x' + 2y') = \varphi(x, y, z) + \lambda\varphi(x', y', z').$$
  Donc φ est bien linéaire et $\boxed{\text{son noyau est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^3.}$
  De plus, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a :
  $$(x, y, z) \in E \Leftrightarrow x + 2y = 0 \Leftrightarrow x = -2y \Leftrightarrow (x, y, z) = (-2y, y, z) = y(-2, 1, 0) + z(0, 0, 1).$$
  Donc $\boxed{((-2, 1, 0), (0, 0, 1))}$ est une famille génératrice de E. Elle est échelonnée donc libre. C'est donc une base de E. Et $\boxed{\text{ainsi } \dim E = 2.}$
- On a :
  - $F \subset \mathbb{R}^3$;
  - $(0, 0, 0) \in F$;
  - soient $(x, y, z) \in F$ et $(x', y', z') \in F$ et soit $\lambda \in R$. On a :
    $$(x + \lambda x') + 5(y + \lambda y') - 3(z + \lambda z') = \underbrace{(x + 5y - 3z)}_{=0} + \lambda \underbrace{(x' + 5y' - 3z')}_{=0} = 0.$$
    De même :
    $$-(x + \lambda x') - 4(y + \lambda y') + 2(z + \lambda z') = \underbrace{(-x - 4y + 2z)}_{=0} + \lambda \underbrace{(-x' - 4y' + 2z')}_{=0} = 0.$$
    Donc $(x + \lambda x', y + \lambda y', z + \lambda z') \in F$;
    Donc F est stable par combinaison linéaire.

Donc $\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^3.}$

De plus, pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$\begin{aligned}
(x,y,z) \in F \quad & \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x+5y-3z & = & 0 \\ -x-4y+2z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \underset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{\Leftrightarrow} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x+5y-3z & = & 0 \\ y-z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -2z \\ y & = & z \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow \quad (x,y,z) = z(-2,1,1).
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{((-2,1,1))}$ est une famille génératrice de F, qui est clairement libre. C'est donc une base de F. Et $\boxed{\dim F = 1.}$

- L'application $\psi : P \mapsto (X-1)P' - XP'' - 2P$ est linéaire par linéarité des opérations (multiplications par un polynôme fixé et sommes) et par linéarité de la dérivation.

  Donc $\boxed{\text{son noyau, qui est } G \text{, est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}_2[X]}$ (son domaine de définition).

  Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. On peut écrire $P = aX^2 + bX + c$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$\begin{aligned}
P \in G \quad & \Leftrightarrow \quad (X-1)P' - XP'' = 2P \\
& \Leftrightarrow \quad (X-1)(2aX+b) - 2aX = 2(aX^2+bX+c) \\
& \Leftrightarrow \quad 2aX^2 + bX - b = 2aX^2 + 2bX + 2c \\
& \Leftrightarrow \quad bX - b = 2bX + 2c \\
& \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} b & = & 2b \\ -b & = & 2c \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} b & = & 0 \\ c & = & 0 \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow \quad P = aX^2.
\end{aligned}$$

  Donc $\boxed{(X^2)}$ est une famille, clairement libre, génératrice de G. Donc c'est une base de G. Et donc $\boxed{\dim G = 1.}$

- On connaît la chanson : $\xi : M \mapsto MN - NM$ est bien une application linéaire. Comme $H = \mathrm{Ker}\xi$, on a bien que $\boxed{H \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathrm{M}_2(\mathbb{R}).}$

  Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$. Notons $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $a,b,c,d \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
M \in H \quad & \Leftrightarrow \quad MN = NM \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 a & \lambda_2 b \\ \lambda_1 c & \lambda_2 d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 a & \lambda_1 b \\ \lambda_2 c & \lambda_2 d \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_2 b & = & \lambda_1 b \\ \lambda_1 c & = & \lambda_2 c \end{array} \right. .
\end{aligned}$$

  On en vient à distinguer deux cas :

  1. **Si** $\lambda_1 = \lambda_2$**,** la condition est toujours vérifiée. Dans ce cas, $H = \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ et $\dim H = 4$.
  2. **Si** $\lambda_1 \neq \lambda_2$**,** la condition est équivalente à $b = c = 0$, c'est-à-dire H est l'ensemble des matrices diagonales. $\boxed{\text{Une base de } H \text{ est alors } \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)}$ et on a $\boxed{\dim H = 2.}$

Exercice 3 ⋆

Montrons d'abord que F et G sont en somme directe.

Soit $(x,y,z,t) \in F \cap G$. Puisque $(x,y,z,t) \in F$, on a $x+y+2z-t=0$ et puisque $(x,y,z,t) \in G$, on peut écrire $(x,y,z,t) = \lambda(1,1,1,1)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
En réinjectant, on trouve donc l'équation suivante sur λ :

$$\lambda + \lambda + 2\lambda - \lambda = 0 \Leftrightarrow 3\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0.$$

Et donc nécessairement $(x,y,z,t) = (0,0,0,0)$. Ceci prouve que $F \cap G \subset \{0\}$. L'inclusion réciproque est toujours vraie et donc $F \cap G = \{0\}$. Ainsi, $\boxed{F \text{ et } G \text{ sont en somme directe.}}$
De plus, $F = \ker \varphi$ avec $\varphi : (x,y,z,t) \mapsto x+y+2z-t$ qui est une forme linéaire non nulle. Ainsi F est un hyperplan de $\mathbb{R}^4$ et est donc de dimension 3. G est clairement de dimension 1 (on en connaît une famille génératrice qui est clairement libre). On a donc :

$$\boxed{\dim F + \dim G = 4 = \dim \mathbb{R}^4.}$$

Par égalité sur les dimensions, $\boxed{F \text{ et } G \text{ sont donc supplémentaires dans } \mathbb{R}^4.}$

Exercice 4 ⋆⋆

1. Montrons rapidement que F et G sont en somme directe.
Soit $(x,y,z,t) \in F \cap G$. On a donc :

$$\begin{cases} x+y+z+t &= 0 \\ x-2y+3z-5t &= 0 \end{cases}$$

et il existe $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$(x,y,z,t) = \lambda(1,-2,0,2) + \mu(0,0,1,3).$$

On en déduit :

$$\begin{cases} \lambda + (-2\lambda) + \mu + (2\lambda+3\mu) &= 0 \\ \lambda - 2(-2\lambda) + 3\mu - 5(2\lambda+3\mu) &= 0 \end{cases}$$

que l'on peut réécrire :

$$\begin{cases} \lambda + 4\mu &= 0 \\ -5\lambda - 12\mu &= 0 \end{cases}$$

Le déterminant de $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -5 & -12 \end{pmatrix}$ est :

$$\det A = 1 \times (-12) - (-5) \times 4 = -12 + 20 = 8 \neq 0.$$

Donc la matrice A est inversible et donc l'unique solution du système est $(\lambda,\mu) = (0,0)$. On en déduit que $x=y=z=t=0$. $\boxed{\text{Donc } F \text{ et } G \text{ sont bien en somme directe.}}$
Essayons de montrer par un argument dimensionnel que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$. La famille $((1,-2,0,2),(0,0,1,3))$ est génératrice pour G et est libre car échelonnée. Donc c'est une base de G et ainsi $\boxed{\dim G = 2.}$
Pour F, on pourrait chercher une base, mais on prendrait alors de l'avance sur la question suivante. C'est possible, mais je vous propose un autre argument.
Notons $F_1 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z+t=0\}$ et $F_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x-2y+3z-5t=0\}$. Clairement $F = F_1 \cap F_2$. Or F_1 et F_2 sont tous les deux des noyaux de formes linéaires non nulles. Ce sont donc des hyperplans de $\mathbb{R}^4$ et on a : $\dim F_1 = \dim F_2 = 4-1 = 3$.
On applique maintenant la formule de Grassmann :

$$\dim F = \dim(F_1 \cap F_2) = \dim F_1 + \dim F_2 - \underbrace{\dim(F_1+F_2)}_{\leqslant 4} \geqslant 3+3-4 \geqslant 2.$$

Une nouvelle application de la formule de Grassmann donne :

$$\dim(F \oplus G) = \underbrace{\dim(F)}_{\geqslant 2} + \underbrace{\dim(G)}_{=2} - \underbrace{\dim(F \cap G)}_{=0} \geqslant 4.$$

Or $F \oplus G \subset \mathbb{R}^4$. Donc $\dim(F \oplus G) = 4$. D'où, par égalité des dimensions :

$$\boxed{F \oplus G = \mathbb{R}^4.}$$

Ce raisonnement, un peu compliqué à rédiger, traduit une idée très simple : à chaque équation qui définit F, on perd au plus une dimension. Donc F est au moins de dimension 2. Comme la somme est directe, on recouvre nécessairement "au moins" les 4 dimensions de $\mathbb{R}^4$.

2. Comme F et G sont en somme directe, la concaténation de deux familles libres, une de F et une de G restera libre. Avec le bon cardinal, on aura automatiquement une base.

   On a une base naturelle de G : $\boxed{e_3 = (1,-2,0,2) \text{ et } e_4 = (0,0,1,3).}$ Il reste à trouver une telle base pour F.

   Pour cela, soit $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$. On a :

$$\begin{aligned}
(x,y,z,t) \in F \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x+y+z+t &= 0 \\ x-2y+3z-5t &= 0 \end{cases} \\
& \underset{L_2 \leftarrow -L_2+L_1}{\Leftrightarrow} \quad \begin{cases} x+y+z+t &= 0 \\ 3y-2z+6t &= 0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x &= -\frac{5}{3}z+t \\ y &= \frac{2}{3}z-2t \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad (x,y,z,t) = \frac{z}{3}(-5,2,3,0)+t(1,-2,0,1).
\end{aligned}$$

   Donc $((-5,2,3,0),(1,-2,0,1))$ est une famille génératrice de F. Elle est également libre (on peut le voire parce qu'elle est échelonnée ou par égalité des dimensions). C'est une base de F.

   En posant $\boxed{e_1 = (-5,2,3,0) \text{ et } e_2 = (1,-2,0,1)}$, on a une famille libre de F. Concaténée avec la famille (e_3,e_4) libre de G, on obtient une famille libre de $\mathbb{R}^4$ car F et G sont en somme directe.

   (e_1,e_2,e_3,e_4) est donc libre et par égalité des dimensions, $\boxed{\text{c'est bien une base de } \mathbb{R}^4.}$

3. Soit $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$. On résout le système suivant d'inconnues $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned}
& (x,y,z,t) = a(-5,2,3,0)+b(1,-2,0,1)+c(1,-2,0,2)+d(0,0,1,3) \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{cases} x &= -5a+b+c \\ y &= 2a-2b-2c \\ z &= 3a+d \\ t &= b+2c+3d \end{cases} \\
\underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\Leftrightarrow} \quad & \begin{cases} z &= 3a+d \\ x &= -5a+b+c \\ y &= 2a-2b-2c \\ t &= b+2c+3d \end{cases} \\
\underset{L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1}{\Leftrightarrow} \quad & \begin{cases} z &= 3a+d \\ x &= -5a+b+c \\ y &= 2a-2b-2c \\ t-3z &= -9a+b+2c \end{cases} \\
\underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3+2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4-2L_2}}{\Leftrightarrow} \quad & \begin{cases} z &= 3a+d \\ x &= -5a+b+c \\ y+2x &= -8a \\ t-3z-2x &= a-b \end{cases} \\
\Leftrightarrow \quad & \boxed{\begin{cases} a &= -\frac{1}{8}(2x+y) \\ b &= \frac{1}{8}(14x-y+24z-8t) \\ c &= \frac{1}{2}(-4x-y-6z+2t) \\ d &= \frac{1}{8}(6x+3y+8z) \end{cases}}
\end{aligned}$$

Exercice 5 ⋆⋆

1. On a bien $F \subset \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+)$ par définition. De plus :
   - Soit $f : x \mapsto 0$. f est le vecteur nul de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+)$. On a $f(0)=0$ et $f'(0)=0$. Donc $f \in F$. Donc $\boxed{F \neq \varnothing.}$

- Soient $f, g \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$(f+\lambda g)(0) = \underbrace{f(0)}_{=0} + \lambda \underbrace{g(0)}_{=0} = 0$$

et de manière similaire :

$$(f+\lambda g)'(0) = \underbrace{f'(0)}_{=0} + \lambda \underbrace{g'(0)}_{=0} = 0.$$

$\boxed{\text{Donc } (f+\lambda g) \in F.}$

F est donc bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+)$.

De manière similaire, $\boxed{G \text{ est bien un sous-espace vectoriel de } \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+)}$ puisque la fonction nulle est une fonction affine et puisque une combinaison linéaire de deux fonctions affines est affine.

2. Nous ne travaillons pas en dimension finie. Il va donc falloir montrer s'une manière ou d'une autre que $F + G = \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+)$, ce qui est en général difficile à faire. C'est donc l'occasion de faire une démonstration par analyse-synthèse.
On va montrer que pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^1(R_+)$, il existe un unique couple $(f, g) \in F \times G$ tel que $\varphi = f + g$. L'existence prouve que $F + G = \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+)$ (en fait uniquement une inclusion, mais l'autre est toujours vraie) et l'unicité prouve que F et G sont en somme directe.
   - **Analyse :** Soit $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+)$. Soit $(f, g) \in F \times G$ tel que $\varphi = f + g$.
   Par définition, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $g(x) = ax + b$.
   On a donc :

$$\varphi(0) = \underbrace{f(0)}_{=0} + \underbrace{g(0)}_{=a\times 0+b} = b.$$

   Puis, en dérivant :

$$\varphi'(0) = \underbrace{f'(0)}_{=0} + \underbrace{g'(0)}_{=a} = a.$$

   Ainsi, on a nécessairement pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{g(x) = \underbrace{\varphi'(0)}_{=a} x + \underbrace{\varphi(0)}_{=b}.}$$

   En outre on a lors pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{f(x) = \varphi(x) - g(x) = \varphi(x) - \varphi'(0)x - \varphi(0).}$$

   On a trouvé des expressions pour f et g qui ne dépendent que de φ. Donc $\boxed{\text{l'analyse prouve l'unicité.}}$
   - **Synthèse :** Soit $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+)$. On pose :

$$g : x \mapsto \varphi'(0)x + \varphi(0).$$

   Clairement $\boxed{g \in G.}$ On pose également :

$$f : x \mapsto \varphi(x) - \varphi'(0)x - \varphi(0).$$

   Vérifions que $f \in F$. On a :

$$f(0) = \varphi(0) - \varphi'(0) \times 0 - \varphi(0) = 0$$

   et de manière similaire :

$$f'(0) = \varphi'(0) - \varphi'(0) = 0.$$

   Donc $\boxed{\text{on a bien } f \in F.}$
   Vérifions enfin que $f + g = \varphi$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\boxed{f(x) + g(x) = \varphi(x) - \varphi'(0)x - \varphi(0) + \varphi'(0)x + \varphi(0) = \varphi(x).}$$

   Donc on a bien $\boxed{f + g = \varphi.}$

   $\boxed{\text{La synthèse prouve l'existence.}}$

Donc, par analyse-synthèse, on a bien que $\boxed{F \text{ et } G \text{ sont supplémentaires dans } \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+).}$

3. Techniquement f n'est pas dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+)$. En revanche, son prolongement par continuité l'est. En effet :

$$\frac{\ln(1+2x)}{x} \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{2x}{x} \underset{x\to 0^+}{\sim} 2.$$

Donc en posant $f(0) = 2$, $\boxed{\text{la fonction ainsi prolongée est continue en 0.}}$
De plus, on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$:

$$f'(x) = \frac{2}{x(1+2x)} - \frac{\ln(1+2x)}{x^2} = \frac{x - \ln(1+2x)}{x^2(1+2x)}.$$

Or :

$$x - \ln(1+2x) = 2x - 2x + \frac{(2x)^2}{2} + \underset{x\to 0^+}{o}(x^2) = 2x^2 + \underset{x\to 0^+}{o}(x^2)$$

Donc :

$$f'(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{2}{1+2x} \underset{x\to 0^+}{\sim} 2.$$

Comme f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^\star$, comme f admet une limite finie en 0 et comme f' admet une limite finie en 0, d'après le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$, $\boxed{\text{le prolongement par continuité de } f \text{ en 0 est } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+.}$
On a trouvé à la question précédente les expressions pour la décomposition d'une fonction. Il suffit de les appliquer. On pose :

$$\boxed{f_1 : x \mapsto \frac{\ln(1+2x)}{x} - \underbrace{2}_{=f'(0)} x - \underbrace{2}_{=f(0)}}$$

et :

$$\boxed{f_2 : x \mapsto \underbrace{2}_{=f'(0)} x + \underbrace{2}_{=f(0)}.}$$

D'après la question précédente, on a $f_1 + f_2 = f$ et $f_1 \in F$ et $f_2 \in G$.

Exercice 6 ⋆⋆

1. Soit $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned} M \in F &\Leftrightarrow \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ M = \begin{pmatrix} a & 2a+b \\ -b & -a \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ M = a\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow M \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right). \end{aligned}$$

Donc $\boxed{F \text{ est bien un sous-espace vectoriel}}$ de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ et $\boxed{\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right) \text{ en est une base.}}$

De même $\boxed{G = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right).}$

2. Soit $M \in F \cap G$. On peut donc écrire :

$$M = \begin{pmatrix} a & 2a+b \\ -b & -a \end{pmatrix}$$

avec $a, b \in R$ et :

$$M = \begin{pmatrix} a' & 3a'+b' \\ -b' & -2a'+b' \end{pmatrix}$$

avec $a', b' \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{pmatrix} a & 2a+b \\ -b & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & 3a'+b' \\ -b' & -2a'+b' \end{pmatrix}.$$

On en déduit :

$$\begin{cases} a &= a' \\ 2a+b &= 3a'+b' \\ -b &= -b' \\ -a &= -2a'+b' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a' &= a \\ b' &= b \\ 2a+b &= 3a+b \\ -a &= -2a+b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a' &= a \\ b' &= b \\ a &= 0 \\ b &= 0 \end{cases}$$

et donc : $M = 0$.

Donc $\boxed{\text{la somme } F+G \text{ est directe.}}$

Comme $\dim F + \dim G = 2 + 2 = 4 = \dim \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, $\boxed{F \text{ et } G \text{ sont bien supplémenatires dans } \mathrm{M}_2(\mathbb{R}).}$

Exercice 7 ⋆⋆

1. • On a par définition $\boxed{F \subset \mathbb{R}_4[X].}$
   • On a bien $\boxed{0_{\mathbb{R}_4[X]} \in F.}$
   • Si $P, Q \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors :
   $$(P+\lambda Q)(0) = \underbrace{P(0)}_{=0} + \lambda \underbrace{Q(0)}_{=0} = 0.$$
   et donc $\boxed{P + \lambda Q \in F.}$

   Donc $\boxed{F \text{ est bien un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}_4[X].}$

   On peut facilement vérifier que (X, X^2, X^3) est une famille libre de F. F est le noyau de $\psi : P \mapsto P(0)$ qui est une forme linéaire non nulle. Donc F est un hyperplan de $\mathbb{R}_4[X]$ et donc de dimension $4-1=3$. Par égalité des dimensions, $\boxed{(X, X^2, X^3) \text{ est une base de } F.}$

2. • On a par définition $\boxed{G \subset \mathbb{R}_4[X].}$
   • On a bien $\boxed{0_{\mathbb{R}_4[X]} \in G.}$
   • Si $P, Q \in G$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors :
   $$(P+\lambda Q)(4) = \underbrace{P(4)}_{=0} + \lambda \underbrace{Q(4)}_{=0} = 0.$$
   et donc $\boxed{P + \lambda Q \in G.}$

   Donc $\boxed{G \text{ est bien un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}_4[X].}$

   On peut facilement vérifier que $((X-4), (X-4)^2, (X-4)^3)$ est une famille libre de G (clairement dans G et échelonnée). G est le noyau de $\varphi : P \mapsto P(4)$ qui est une forme linéaire non nulle. Donc G est un hyperplan de $\mathbb{R}_4[X]$ et donc de dimension $4-1=3$.

   Par égalité des dimensions, $\boxed{((X-4), (X-4)^2, (X-4)^3) \text{ est une base de } G.}$

3. Procédons par double inclusion.
   • **Sens $H \supset \{X(X-4)Q \mid Q \in \mathbb{R}_2[X]\}$:** soit $Q \in \mathbb{R}_2[X]$. On pose $P = X(X-4)Q$. On a :
   $$P(0) = 0 \times (0-4) \times Q(0) = 0.$$
   Donc $P \in F$. Et :
   $$P(4) = 4 \times (4-4) \times Q(4) = 0.$$
   Donc $P \in G$. Donc on a bien $\boxed{P \in F \cap G = H.}$

- **Sens $H \subset \{X(X-4)Q \mid Q \in \mathbb{R}_2[X]\}$:** soit $P \in H$. On a donc $P \in F$. D'où $P(0) = 0$. P est donc divisible par $X - 0 = X$. On note :
$$P = X \times \tilde{P}$$
où $\tilde{P} \in \mathbb{R}_3[X]$. Ensuite, $P \in G$. Donc $P(4) = 0$. D'où :
$$0 = P(4) = 4 \times \tilde{P}(4).$$
Donc $\tilde{P}$ a 4 pour racine et donc est divisible par $X - 4$. Ainsi il existe bien $Q \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que :
$$\boxed{P = X(X-4)Q.}$$

On en déduit immédiatement que tout vecteur de H s'écrit :
$$X(X-4)(aX+b)$$
avec $a, b \in \mathbb{R}$. Donc $(X^2(X-4), X(X-4))$ est une famille génératrice de H (les vecteurs sont clairement dans H). Comme c'est une famille de polynôme de degrés échelonnés, elle est également libre.
Ainsi $\boxed{(X^2(X-4), X(X-4)) \text{ est une base de } H.}$

Exercice 8 ⋆⋆⋆

1. - On a par définition $\boxed{F \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}).}$
   - On a bien $\boxed{0_{\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})} \in F.}$
   - Si $f, g \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors :
   $$(f + \lambda g)(0) = \underbrace{f(0)}_{=f(1)} + \lambda \underbrace{g(0)}_{=g(1)} = (f + \lambda g)(1).$$
   et donc $\boxed{f + \lambda g \in F.}$

   Donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. $\boxed{\text{C'est donc bien un espace vectoriel.}}$
2. Comme nous ne sommes pas en dimension finie, une démonstration par analyse-synthèse est naturelle.
   - **Analyse :** Soit $\varphi \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Soit $(f, \lambda) \in F \times \mathbb{R}$ tel que $\varphi = f + \lambda g$. On a donc :
   $$\varphi(1) - \varphi(0) = f(1) - \lambda \times 1 - f(0) - \lambda \times 0 = \lambda.$$
   Donc nécessairement : $\boxed{\lambda = \varphi(1) - \varphi(0).}$ Puis pour tout $x \in \mathbb{R}$:
   $$\boxed{f(x) = \varphi(x) - \lambda g(x) = \varphi(x) - (\varphi(1) - \varphi(0))x.}$$
   On a trouvé des formules pour f et λ qui ne dépendent que de φ.
   $\boxed{\text{L'analyse prouve donc l'unicité de la décomposition.}}$
   - **Synthèse :** Soit $\varphi \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On pose :
   $$\lambda = \varphi(1) - \varphi(0) \quad \text{et} \quad f : x \mapsto \varphi(x) - \lambda x.$$
   On a clairement $\boxed{\lambda g \in G.}$ Vérifions que $f \in F$.
   On a bien $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ par opérations usuelles sur les fonctions continues. De plus :
   $$f(0) = \varphi(0) - \lambda \times 0 = \varphi(0)$$
   et :
   $$f(1) = \varphi(1) - \underbrace{\lambda}_{=\varphi(1)-\varphi(0)} \times 1 = \varphi(0)$$
   donc $f(0) = f(1)$. On a donc bien $\boxed{f \in F.}$
   Enfin pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
   $$\boxed{f(x) + \lambda x = \varphi(x) - \lambda x + \lambda x = \varphi(x).}$$
   $\boxed{\text{La synthèse prouve l'existence de la décomposition.}}$

$\boxed{\text{Ainsi } F \text{ et } G \text{ sont bien supplémentaires dans } \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}).}$

Exercice 9 ⋆⋆⋆⋆

1. Soit $i \in [\![0,n]\!]$.
   - On a par définition $\boxed{F_i \subset \mathbb{R}_n[X].}$
   - On a bien $\boxed{0_{\mathbb{R}_n[X]} \in F_i.}$
   - Si $P, Q \in F_i$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors pour $j \neq i$, on a :
   $$(P+\lambda Q)(j) = \underbrace{P(j)}_{=0} + \lambda \underbrace{Q(j)}_{=0} = 0.$$
   et donc $\boxed{P+\lambda Q \in F_i.}$

   Donc $\boxed{F_i \text{ est bien un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}_n[X].}$
   Soit maintenant $P \in \mathbb{R}_n[X]$. On a : $P \in F_i \Leftrightarrow \forall j \in [\![0,n]\!] \setminus \{i\},\ P(j) = 0$ donc $P \in F_i \Leftrightarrow \forall j \in [\![0,n]\!] \setminus \{i\},\ X - j \mid P$ ou encore $P \in F_i \Leftrightarrow \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}(X-j) \mid P$. Par considération sur le degré, le facteur restant est au plus de degré 0. Donc :
   $$\boxed{P \in F_i \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R},\ P = \lambda \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}(X-j).}$$
2. Soient $(P_0, \dots, P_n) \in F_0 \times \cdots \times F_n$ tel que $P_0 + \cdots + P_n = 0$. Montrons que $P_0 = \cdots = P_n = 0$.
   Soit $i \in [\![0,n]\!]$. On a :
   $$\underbrace{P_0(i)}_{=0} + \cdots + \underbrace{P_{i-1}(i)}_{=0} + P_i(i) + \underbrace{P_{i+1}(i)}_{=0} + \cdots + \underbrace{P_n(i)}_{=0} = 0$$
   et donc $P_i(i) = 0$. Or il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $P_i = \lambda \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}(X-j)$. Donc :
   $$\lambda \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \underbrace{(i-j)}_{\neq 0} = 0.$$
   D'où $\lambda = 0$, ce qui donne $\boxed{P_i = 0.}$ Donc $\boxed{\text{la somme } F_0 + \cdots + F_n \text{ est bien directe.}}$
3. Pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, $(prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}(X-j))$ est une base de F_i d'après la première question. Donc $\dim F_i = 1$.
   Ainsi, comme $\dim F_0 + \cdots + \dim F_n = n+1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$, par considération sur les dimensions, on a bien :
   $$\boxed{\mathbb{R}_n[X] = \bigoplus_{i=0}^{n} F_i.}$$

2 Applications linéaires

Exercice 10 ⋆

- **Méthode 1 :** On vérifie les trois caractéristiques de sous-espaces vectoriels :
  - On a bien $\boxed{E_\lambda(f) \subset E.}$
  - Comme $f(0_E) = 0_E = \lambda \times 0_E$, $\boxed{\text{on a bien } 0_E \in E.}$
  - Soient $x, y \in E_\lambda(f)$ et $\mu \in \mathbb{R}$. On a :
  $$f(x+\mu y) \underset{\text{linéarité}}{=} \underbrace{f(x)}_{=\lambda x} + \mu \underbrace{f(y)}_{=\lambda y} = \lambda(x+\mu y).$$
  Donc $\boxed{\text{on a bien } x + \mu y \in E_\lambda(f).}$

Donc $\boxed{E_\lambda(f) \text{ est bien un sous-espace vectoriel de } E.}$

- **Méthode 2 :** On pose : $g : x \mapsto f(x) - \lambda x$. On a vérifie que g est linéaire. Soient $x, y \in E$ et $\mu \in \mathbb{R}$. On a :

$$g(x+\mu y) \underset{\text{définition}}{=} f(x+\mu y) - \lambda(x+\mu y) \underset{\text{linéarité de } f}{=} f(x) + \mu f(y) - \lambda x - \mu\lambda y = \underbrace{(f(x) - \lambda x)}_{=g(x)} + \mu \underbrace{(f(y) - \lambda y)}_{=g(y)}.$$

Donc $\boxed{g \text{ est bien une application linéaire de } E \text{ dans } E.}$

En conséquence, comme $E_\lambda(f) = \operatorname{Ker}(g)$, on a bien $\boxed{E_\lambda(f) \text{ est un sous-espace vectoriel de } E.}$

Exercice 11 - Vrai ou faux ⋆⋆

1. Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est libre alors $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est libre.
   $\boxed{\textbf{Faux.}}$ On a un contre exemple avec $f : x \mapsto 0_F$.
2. Si $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est libre alors $(e_1, \ldots, e_n)$ est libre.
   $\boxed{\textbf{Vrai.}}$ Soient $e_1, \ldots, e_n \in E$. On suppose que $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est libre. Soient maintenant $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = 0_E$. Montrons que $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$.
   On a en effet :
   $$f(\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n) = f(0_E) = 0_F.$$
   Mais on a également :
   $$f(\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n) = \lambda_1 f(e_1) + \cdots + \lambda_n f(e_n)$$
   par linéarité de f. D'où $\lambda_1 f(e_1) + \cdots + \lambda_n f(e_n) = 0_F$. Or $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est libre. Donc on a nécessairement $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$.
   Ainsi $\boxed{(e_1, \ldots, e_n) \text{ est bien une famille libre de } E.}$
3. Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est génératrice alors $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est génératrice.
   $\boxed{\textbf{Faux.}}$ On a un contre exemple avec $f : x \mapsto 0_F$.
4. Si $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est génératrice alors $(e_1, \ldots, e_n)$ est génératrice.
   $\boxed{\textbf{Faux.}}$ On a un contre-exemple avec $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \mathbb{R}^2$ et :
   $$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{array} \right.$$
   On peut alors prendre la famille $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. $\boxed{(e_1, e_2) \text{ n'est pas génératrice}}$ (il manque au moins un vecteur) mais $\boxed{(f(e_1), f(e_2)) \text{ l'est.}}$

   On peut faire une contre-exemple avec seulement $E = \mathbb{R}^2$ et $F = \mathbb{R}$. Il faut cependant bien avoir en tête que $\mathbb{R}$ est bien un espace vectoriel (de dimension 1).
5. Si $\operatorname{Im}(f) = F$ alors f est injective.
   $\boxed{\textbf{Faux.}}$ L'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie à la question précédente est un contre-exemple. On a $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.
6. Si $\operatorname{Im}(f) = F$ et $\dim(F) = \dim(E)$ alors f est injective.
   $\boxed{\textbf{Vrai.}}$ Comme on travaille visiblement en dimension finie, on applique la formule du rang :
   $$\dim E = \underbrace{\dim \operatorname{Im}(f)}_{=\dim E} + \dim \operatorname{Ker}(f).$$
   Donc $\dim \operatorname{Ker}(f) = 0$, donc $\boxed{f \text{ est bien injective.}}$

C'est exactement la même raison qui fait qu'un endomorphisme injectif ou surjectif est automatiquement bijectif (en dimension finie).

7. Si g est une autre application linéaire de E dans F avec $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(g)$ et $\ker(f) = \ker(g)$ alors $f = g$.
   Faux. Par exemple, si on pose $F = E$ et $f = \mathrm{Id}_E$ et $g = 2\mathrm{Id}_E$, on a bien $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(g)$ et $\ker(f) = \ker(g)$ mais $f \neq g$.

Exercice 12 - À savoir faire ! ⋆⋆

Procédons par double implication :
($\Rightarrow$) On suppose $g \circ f = 0$. Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$. Montrons que $y \in \mathrm{Ker}(g)$.
Comme $y \in \mathrm{Im}(f)$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Calculons :

$$g(y) = g(f(y)) = \underbrace{g \circ f}_{=0}(y) = 0.$$

Donc $\boxed{y \in \mathrm{Ker}(g)}$. Et ainsi $\boxed{\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g).}$
($\Leftarrow$) On suppose que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$ Montrons que $g \circ f = 0$
Soit $x \in E$. On calcule :

$$g \circ f(x) = g(\underbrace{f(x)}_{\in \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)}) = 0_G.$$

On a donc bien $\boxed{g \circ f = 0.}$

Exercice 13 ⋆⋆

Soit $u \notin \mathrm{Ker}(\varphi)$. Commençons par montrer que la somme $\mathrm{Ker}(\varphi) + \mathrm{Vect}(u)$ est directe.
Soit $x \in \ker(\varphi) \cap \mathrm{Vect}(u)$. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x = \lambda u$. De plus, on a :

$$0 = \varphi(x) = \varphi(\lambda u) = \lambda \underbrace{\varphi(u)}_{\neq 0}.$$

Donc nécessairement $\lambda = 0$, ce qui donne $\boxed{x = 0.}$
Montrons maintenant que $\mathrm{Ker}(\varphi)$ et $\mathrm{Vect}(u)$ sont supplémentaires.
Remarquons que $\dim \mathrm{Vect}(u) = 1$ et $\dim \mathrm{Ker}(\varphi) = n - 1$ puisque $\mathrm{Ker}\varphi$ est un hyperplan de E en tant que noyau de forme linéaire non nulle. Donc :

$$\dim \mathrm{Ker}(\varphi) + \dim \mathrm{Vect}(u) = n = \dim E.$$

Par égalité des dimensions, on a bien $\boxed{E = \ker(\varphi) \oplus \mathrm{Vect}(u).}$

Exercice 14 - Polynômes de Lagrange ⋆⋆

1. Soient $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}\varphi(P + \lambda Q) &= ((P + \lambda Q)(a_0), \dots, (P + \lambda Q)(a_n)) = (P(a_0) + \lambda Q(a_0), \dots, P(a_n) + \lambda Q(a_n)) \\ &= (P(a_0), \dots, P(a_n)) + \lambda(Q(a_0), \dots, Q(a_n)) \boxed{= \varphi(P) + \lambda\varphi(Q).}\end{aligned}$$

   Donc $\boxed{\varphi \text{ est bien une application linéaire de } \mathbb{R}_n[X] \text{ dans } \mathbb{R}^{n+1}.}$

2. Montrons que φ est injectif. Soit $P \in \mathrm{Ker}\varphi$. Montrons que $P = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$.
   Puisque $P \in \mathrm{Ker}\varphi$, on a :

$$P(a_0) = \ldots = P(a_n) = 0.$$

   Comme les a_0 à a_n sont distincts, P a $n+1$ racines. Le seul polynôme de degré au plus n ayant $n+1$ racines est le polynôme nul. Donc $\boxed{P = 0.}$ Ainsi $\boxed{\varphi \text{ est injectif.}}$
   De plus, $\dim \mathbb{R}_n[X] = n + 1 = \dim \mathbb{R}^{n+1}$. Donc par égalité des dimensions, $\boxed{\varphi \text{ est bijectif}}$, c'est-à-dire $\boxed{\varphi \text{ est un isomorphisme.}}$

3. (a) Soit $k \in [\![0,n]\!]$. Si $i \neq k$, On a :

$$L_i(a_k) = \prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n} \frac{a_k - a_j}{a_i - a_j} = \underbrace{\frac{a_k - a_k}{a_i - a_k}}_{=0} \times \prod_{\substack{j=0\\j\neq i\\j\neq k}}^{n} \frac{a_k - a_j}{a_i - a_j} = 0.$$

Et si $i = k$:

$$L_i(a_k) = \prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n} \frac{a_k - a_j}{a_i - a_j} = \prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n} \underbrace{\frac{a_k - a_j}{a_k - a_j}}_{=1} = 1.$$

Ainsi :

$$\boxed{\varphi(L_i) = (L_i(a_0), \ldots, L_i(a_n)) = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{i^{\text{ème}} \text{ position}}, 0, \ldots, 0)}$$

qui est le $i^{\text{ème}}$ (en comptant à partir de 0) vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$.

(b) La famille $((1,0,\ldots,0),(0,1,\ldots,0),\ldots,(0,0,\ldots,1))$ est la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$. Son image réciproque par un isomorphisme est également une base.

Donc $\boxed{(L_0, \ldots, L_n) \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[X].}$

Exercice 15 ⋆⋆

1. Soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$. Montrons que $g(x) \in \mathrm{Ker}(f)$.
On calcule :

$$f(g(x)) = f \circ g(c) = g \circ f(x) = g(\underbrace{f(x)}_{=0}) = 0.$$

Donc $\boxed{\ker(f) \text{ est stable par } g.}$

2. Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$. Montrons que $g(y) \in \mathrm{Im}(f)$.
Puisque $y \in \mathrm{Im}(f)$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. On a alors :

$$g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x) = f \circ g(x) \boxed{= f(g(x)) \in \mathrm{Im}(f).}$$

Donc $\boxed{\mathrm{Im}(f) \text{ est stable par } g.}$

Exercice 16 ⋆⋆

Prouver le résultat par analyse-synthèse.

- **Analyse :** Soit $u \in E$. Soit également $(x,y,z) \in \mathrm{Ker}(f) \times \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) \times \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_E)$. On suppose $u = x + y + z$.
Commençons par remarquer que $f(x) = 0$, que $f(y) = y$ et que $f(z) = -z$. On a donc :

$$y - z = f(x+y+z) = f(u).$$

En appliquant f une seconde fois, on trouve :

$$y + z = f(y - z) = f^2(u).$$

En faisant la somme et la différence de ces deux équations, on trouve :

$$\boxed{\begin{cases} y &= \frac{f^2(u)+f(u)}{2} \\ z &= \frac{f^2(u)-f(u)}{2} \end{cases}.}$$

En réinjectant dans $x + y + z = u$, on trouve $\boxed{x = u - f^2(u).}$

On a trouvé des formules pour x, y et z qui ne dépendent que de u. Ainsi $\boxed{\text{l'analyse prouve l'unicité}}$ de la décomposition de u et donc $\boxed{\text{le caractère directe de la somme d'espaces.}}$

*On pourra remarquer que l'hypothèse $f^3 = f$ n'a pas servi. Cette propriété est donc vraie pour tout endomorphisme **à condition que la décomposition existe.** En effet, tant que la synthèse n'est pas faite, on n'a pas prouvé l'existence et la synthèse est donc bien indispensable pour conclure.*

- **Synthèse :** Soit $u \in E$. On pose $x = u - f^2(u)$, $y = \frac{f^2(u)+f(u)}{2}$ et $z = \frac{f^2(u)-f(u)}{2}$. Vérifions les différents point :
  - On a :
  $$\boxed{x + y + z = u - f^2(u) + \frac{f^2(u) + f(u)}{2} + \frac{f^2(u) - f(u)}{2} = u.}$$
  - On a :
  $$f(x) = f(u - f^2(u)) = f(u) - \underbrace{f^3(u)}_{=f(u)} = 0.$$
  Donc on a $\boxed{x \in \mathrm{Ker}(f).}$
  - On a :
  $$f(y) = f\left(\frac{f^2(u) + f(u)}{2}\right) = \frac{f^3(u) + f^2(u)}{2} = \frac{f(u) + f^2(u)}{2} = y.$$
  Donc on a $\boxed{y \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E).}$
  - On a de manière similaire :
  $$f(z) = f\left(\frac{f^2(u) - f(u)}{2}\right) = \frac{f^3(u) - f^2(u)}{2} = \frac{f(u) - f^2(u)}{2} = -z.$$
  Donc on a $\boxed{z \in \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_E).}$

  $\boxed{\text{La synthèse prouve l'existence de la décomposition.}}$

  Ainsi, on a bien $\boxed{E = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) + \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_E).}$

On a bien finalement : $\boxed{E = \ker(f) \oplus \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \mathrm{Id}_E).}$

Exercice 17 - Symétries ⋆⋆⋆

1. (a) Procédons par double inclusion.
   ($\subset$) Soit $y \in \mathrm{Im}(p)$. Il existe donc $x \in E$ tel que $y = p(x)$. Montrons que $y \in \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_E)$.
   On calcule :
   $$(p - \mathrm{Id}_E)(y) = p(y) - y = \underbrace{p(p(x))}_{=p(x)} - p(x) = 0.$$
   Donc on a bien l'inclusion $\boxed{\mathrm{Im}(p) \subset \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_E.}$
   ($\supset$) Soit $x \in \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_E)$. Montrons que $x \in \mathrm{Im}(p)$.
   On sait que $(p - \mathrm{Id}_E)(x) = 0$ donc :
   $$x = p(x)$$
   Or $p(x) \in \mathrm{Im}(p)$ donc on a bien l'inclusion $\boxed{\mathrm{Im}(p) \supset \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_E.}$
   En conclusion, on a : $\boxed{\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_E.}$

   (b) Calculons :
   $$(2p - \mathrm{Id}_E)^2 = 4p^2 - 4p + \mathrm{Id}_E$$
   puisque Id_E commute avec p. Or $p^2 = p$. Donc :
   $$(2p - \mathrm{Id}_E)^2 = \mathrm{Id}_E.$$
   $\boxed{2p - \mathrm{Id}_E \text{ est bien une symétrie.}}$

2. (a) Calculons :
$$\left(\frac{1}{2}(g+\mathrm{Id}_E)\right)^2 = \frac{1}{4}g^2 + \frac{1}{2}g + \frac{1}{4}\mathrm{Id}_E$$
puisque g et Id_E commutent. Or $g^2 = \mathrm{Id}_E$. Donc :
$$\left(\frac{1}{2}(g+\mathrm{Id}_E)\right)^2 = \frac{1}{2}\left(g+\mathrm{Id}_E\right)$$
$\boxed{\text{Donc } \frac{1}{2}(g+\mathrm{Id}_E) \text{ est un projecteur.}}$

(b) Comme $\frac{1}{2}(g+\mathrm{Id}_E)$ est un projecteur, on sait que $\mathrm{Ker}\frac{1}{2}(g+\mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Im}\frac{1}{2}(g+\mathrm{Id}_E)$ sont supplémentaire dans E.
Il faut maintenant au résultat suivant valable si f est un projecteur : $\mathrm{Im} f = \ker(f-\mathrm{Id}_E)$. Dans notre cas, on a donc : $\mathrm{Im}\frac{1}{2}(g+\mathrm{Id}_E) = \ker(\frac{1}{2}(g+\mathrm{Id}_E)-\mathrm{Id}_E) = \ker\frac{1}{2}(g-\mathrm{Id}_E)$.
Or pour tout endomorphisme f, $\ker f = \ker 2f$. Donc, on a bien :
$$\boxed{E = \ker(g-\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(g+\mathrm{Id}_E).}$$

Exercice 18 - Projecteurs associés ⋆⋆⋆

On a $p+q=\mathrm{Id}_E$. On peut par exemple le réécrire $q = \mathrm{Id}_E - p$.
On a donc :
$$\ker q = \ker(\mathrm{Id}_E - p) = \ker(p-\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Im}(p).$$
Comme q est un projecteur, on a : $\ker(q)\oplus\mathrm{Im}(q) = E$. Et en substituant, on obtient bien :
$$\boxed{E = \mathrm{Im}(p)\oplus\mathrm{Im}(q).}$$

Exercice 19 ⋆⋆⋆

1. On a $\mathrm{Im} g\circ f \subset \mathrm{Im} g$. Donc $\boxed{\mathrm{rg}(g\circ f) \leq \mathrm{rg}(g).}$
2. Soit $y \in \mathrm{Im}(g\circ f)$. Il existe donc $x\in E$ tel que $y = g\circ f(x)$.
Décomposons $f(x)$ dans la base $(e_1,\dots,e_p)$: $f(x) = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p$.
On a donc :
$$y = g(\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p) = \lambda_1 g(e_1) + \cdots + \lambda_p g(e_p).$$
Donc $\boxed{(g(e_1),\dots,g(e_p)) \text{ est bien une famille génératrice de } \mathrm{Im}(g\circ f).}$
On peut donc en extraire une base de cardinalité inférieure. Donc $\dim\mathrm{Im}(g\circ f)\leqslant p$. Comme $p = \dim\mathrm{Im} f = \mathrm{rg} f$, on en déduit :
$$\boxed{\mathrm{rg}(g\circ f)\leq \mathrm{rg}(f).}$$
3. Tout est montré : $\mathrm{rg}(g\circ f)$ est plus petit que $\mathrm{rg}(g)$ et que $\mathrm{rg}(f)$, il est donc plus petit que le plus petit des deux. Dit autrement :
$$\boxed{\mathrm{rg}(g\circ f)\leq \min(\mathrm{rg}(g),\mathrm{rg}(f)).}$$

Exercice 20 ⋆⋆⋆

1. On a $f^2+f-6\mathrm{Id}_E = 0$. On a donc :
$$f\circ\frac{1}{6}(f+\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Id}_E$$
et de même :
$$\frac{1}{6}(f+\mathrm{Id}_E)\circ f = \mathrm{Id}_E.$$
Donc $\boxed{f \text{ est inversible}}$ (c'est donc un isomorphisme puisque c'est déjà un endomorphisme) et $\boxed{f^{-1} = \frac{1}{6}(f+\mathrm{Id}_E).}$

2. Montrons l'existence de ces deux suites par récurrence.
   - **Initialisation :** On a :

$$\begin{array}{rcl} f^0 & = & 0 \times f + 1 \times \mathrm{Id}_E \\ f^1 & = & 1 \times f + 0 \times \mathrm{Id}_E \\ f^2 & = & (-1) \times f + 6 \times \mathrm{Id}_E \end{array}$$

   Donc il existe bien α_n et β_n au moins pour $n \in [\![0, 2]\!]$.
   - **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose qu'il existe α_n et β_n des réels tels que :

$$f^n = \alpha_n f + \beta_n \mathrm{Id}_E.$$

   On compose par f :

$$f^{n+1} = f \circ (\alpha_n f + \beta_n \mathrm{Id}_E) = \alpha_n f^2 + \beta_n f = \alpha_n(-f + 6\mathrm{Id}_E) + \beta_n f = (\beta_n - \alpha_n)f + 6\alpha_n \mathrm{Id}_E.$$

   Donc, en posant $\alpha_{n+1} = \beta_n - \alpha_n$ et $\beta_{n+1} = 6\alpha_n$, on bien l'existence de tels coefficients pour $n+1$.

   La récurrence nous a même donné des formules. Remarquons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec les formules précédentes, on a :

$$\alpha_{n+2} = \beta_{n+1} - \alpha_{n+1} = 6\alpha_n - \alpha_{n+1}.$$

   C'est une formule de récurrence linéaire double. L'équation caractéristique est :

$$X^2 = 6 - X \Leftrightarrow X^2 + X - 6 = 0.$$

   Son discriminant est : $\Delta = 1 - 4 \times 1 \times (-6) = 25 = 5^2$. Donc les racines sont :

$$X_1 = \frac{-1-5}{2} = -3 \quad \text{et} \quad X_1 = \frac{-1+5}{2} = 2.$$

   On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\alpha_n = \lambda(-3)^n + \mu \times 2^n.$$

   Or $\alpha_0 = 0$ et $\alpha_1 = 1$. Donc :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda + \mu & = & 0 \\ -3\lambda + 2\mu & = & 1 \end{array} \right.$$

   qui se résout en $\lambda = -\frac{1}{5}$ et $\mu = \frac{1}{5}$. On obtient donc :

$$\alpha_n = -\frac{1}{5}(-3)^n + \frac{1}{5} \times 2^n.$$

   Puis, en utilisant $\beta_{n+1} = 6\alpha_n$, on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$:

$$\beta_n = -\frac{6}{5}(-3)^{n-1} + \frac{6}{5} \times 2^{n-1}$$

   Un calcul direct révèle que la formule est aussi valable pour $n = 0$. On a donc finalement pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{f^n = \frac{2^n - (-3)^n}{5} f + \frac{6(2^{n-1} - (-3)^{n-1})}{5} \mathrm{Id}_E.}$$

3. On a $\boxed{u - v = f + 3\mathrm{Id}_E - (f - 2\mathrm{Id}_E) = 5\mathrm{Id}_E.}$

   Soit $x \in E$. On a :

$$x = \mathrm{Id}_E(x) = \frac{u-v}{5}(x) = \underbrace{u(\frac{x}{5})}_{\in \mathrm{Im} u} + \underbrace{v(-\frac{x}{5})}_{\in \mathrm{Im}(v)}.$$

   On a donc l'inclusion $\boxed{E \subset \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v).}$ L'inclusion réciproque étant toujours vraie, $\boxed{\text{l'égalité est vérifiée.}}$

4. On a :
$$u \circ v = (f + 3\mathrm{Id}_E) \circ (f - 2\mathrm{Id}_E) = f^2 + f - 6\mathrm{Id}_E \boxed{= 0.}$$
Et de manière similaire :
$$v \circ u = (f - 2\mathrm{Id}_E) \circ (f + 3\mathrm{Id}_E) = f^2 + f - 6\mathrm{Id}_E \boxed{= 0.}$$
Soit maintenant $y \in \mathrm{Im}(u)$. Il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$. On a alors :
$$v(y) = v(u(x)) = \underbrace{v \circ u}_{=0}(x) = 0.$$
Donc $\boxed{\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(v).}$
La démonstration de $\boxed{\mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Ker}(u)}$ se fait de même en utilisant $u \circ v = 0$.
5. On a déjà montré que $E = \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v)$. On obtient donc :
$$E = \underbrace{\mathrm{Im}(u)}_{\subset \mathrm{Ker}(v)} + \underbrace{\mathrm{Im}(v)}_{\subset \mathrm{Ker}(u)} \subset \mathrm{Ker}(v) + \mathrm{Ker}(u).$$
L'inclusion réciproque étant toujours vraie, on obtient $\boxed{E = \mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Ker}(v).}$
Il reste à montrer que la somme est directe.
Soit $x \in \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Ker}(v)$. On a :
$$x = \mathrm{Id}_E(x) = \frac{1}{5}(u - v)(x) = \frac{1}{5}\left(\underbrace{u(x)}_{=0} - \underbrace{v(x)}_{=0}\right) = 0.$$
Donc $\boxed{\mathrm{Ker}(u) \text{ et } \mathrm{Ker}(v) \text{ sont en somme directe.}}$
On a donc bien $\boxed{E = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Ker}(v).}$

Exercice 21 ⋆⋆⋆

Procédons par double implication.
($\Rightarrow$) On suppose que p et f commutent. Montrons que $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont stables par f.
Soit $x \in \mathrm{Ker}(p)$. On calcule :
$$p(f(x)) = p \circ f(x) = f \circ p(x) = f(0) = 0.$$
Donc $\boxed{f(x) \in \mathrm{Ker}(p).}$
Soit $y \in Im(p)$. Il existe donc $z \in E$ tel que $y = p(z)$. On a :
$$f(y) = f(p(x)) = p(f(x)) \in Imp(p).$$
Donc $\boxed{f(y) \in \mathrm{Im}(p).}$

On n'a pas utilisé l'hypothèse « p est un projecteur ». Et en effet, elle n'est pas utile pour cette implication. Elle va donc probablement servir dans la réciproque.

($\Leftarrow$) On suppose que $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont stables par f. Montrons que f et p commutent.
Comme p est un projecteur, on a :
$$E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p).$$
Soit $x \in E$. On peut écrire $x = y + z$ avec $y \in \mathrm{Ker}(p)$ et $z \in \mathrm{Im}(p)$. On a alors :
$$f(p(x)) = f(p(y + z)) = f(z)$$
et :
$$p(f(x)) = p(f(y + z)) = p(\underbrace{f(y)}_{\in \mathrm{Ker}(p)} + \underbrace{f(z)}_{\in \mathrm{Im}(p)}) = f(z).$$

Donc pour tout $x \in E$, on a $f(p(x)) = p(f(x))$, c'est-à-dire $\boxed{p \text{ et } f \text{ commutent.}}$

Exercice 22 ⋆⋆⋆

Montrons que $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est une famille libre.
Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\lambda_0 x + \lambda_1 f(x) + \cdots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(x) = 0$$

Montrons que $\lambda_0 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0$.
Appliquons f à l'égalité. On obtient :

$$\lambda_0 f(x) + \lambda_1 f^2(x) + \cdots + \lambda_{n-2} f^{n-1}(x) + \lambda_{n-1} \underbrace{f^n(x)}_{=0} = 0$$

À chaque application de f, on perd ainsi un terme. En appliquant f^{n-1}, on trouve finalement :

$$\lambda_0 f^{n-1}(x) = 0.$$

Et comme $f^{n-1}(x) \neq 0$, on a $\lambda_0 = 0$. On reprend alors l'équation en f^{n-2} :

$$\underbrace{\lambda_0}_{=0} f^{n-2}(x) + \lambda_1 f^{n-1}(x) = 0$$

et comme $f^{n-1}(x) \neq 0$, on obtient $\lambda_1 = 0$. Et ainsi de proche en proche, on a bien : $\lambda_0 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0$.

On peut le rédiger plus proprement avec une descente finie (c'est comme une récurrence mais avec un nombre fini d'étapes).

Donc $\boxed{\text{la famille } (x, f(x), \dots, f^{n-1}(x)) \text{ est libre.}}$
De plus, $\dim E = \mathrm{card}((x, f(x), \dots, f^{n-1}(x)))$ et donc par égalité des dimensions,
$\boxed{\text{la famille } (x, f(x), \dots, f^{n-1}(x)) \text{ est une base de } E.}$

Exercice 23 ⋆⋆⋆

Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathrm{Im}(p_1) \times \cdots \times \mathrm{Im}(p_n)$ tel que $x_1 + \cdots + x_n = 0$. Montrons que $x_1 = \cdots = x_n = 0$.
Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Montrons que $x_i = 0$.
On applique p_i à la somme $x_1 + \cdots + x_n = 0$. On obtient :

$$p_i(x_1) + \cdots + p_i(x_{i-1}) + p_i(x_i) + p_i(x_{i+1}) + \cdots + p_i(x_n) = 0.$$

Il existe $(y_1, \dots, y_n) \in E^n$ tel que $x_1 = p_1(y_1)$, ..., $x_n = p_n(y_n)$. On peut donc écrire :

$$p_i(p_1(y_1)) + \cdots + p_i(p_{i-1}(y_{i-1})) + p_i(p_i(y_i)) + p_i(p_{i+1}(y_{i+1})) + \cdots + p_i(p_n(y_n)) = 0.$$

Or $p_i \circ p_j = 0$ si $j \neq i$. On obtient donc :

$$p_i(p_i(y_i)) = 0.$$

Or $p_i^2 = p_i$. Donc :

$$\underbrace{p_i(y_i)}_{=x_i} = 0.$$

Ainsi, on a bien $x_i = 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.
Et donc $\boxed{\text{la somme } \mathrm{Im}(p_1) + \ldots + \mathrm{Im}(p_n) \text{ est directe.}}$

3 Exercices de concours

Exercice 24 - HEC 2018 (modifié) ⋆⋆

1. Soit $u \notin \mathrm{Ker}(\varphi)$. Montrons que la somme $\mathrm{Ker}(\varphi) + \mathrm{Vect}(u)$ est directe.
   Soit $x \in \mathrm{Ker}(\varphi) \cap \mathrm{Vect}(u)$. On peut donc écrire $x = \lambda u$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. On a de plus :
   $$0 = \varphi(x) = \varphi(\lambda u) = \lambda \underbrace{\varphi(u)}_{\neq 0}.$$
   On a donc nécessairement $\lambda = 0$. Et donc $\boxed{x = 0.}$
   De plus $\dim \mathrm{Ker}(\varphi) = n - 1$ puisque φ est une forme linéaire non nulle et donc son noyau est un hyperplan de E. Et $\dim \mathrm{Vect}(u) = 1$. Donc :
   $$\dim \mathrm{Ker}(\varphi) + \dim \mathrm{Vect}(u) = n = \dim E.$$
   Donc, par considération sur les dimensions, on a $\boxed{E = \mathrm{Ker}(\varphi) \oplus \mathrm{Vect}(u).}$
2. ($\Rightarrow$) On suppose qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^\star$ tel que $\psi = \lambda\varphi$.
   Soit $x \in E$. Alors, on a :
   $$x \in \mathrm{Ker}(\varphi) \Leftrightarrow \varphi(x) = 0 \Leftrightarrow \lambda\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow \psi(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \mathrm{Ker}(\psi).$$
   On peut en effet multiplier ou diviser par λ qui est non nul. Donc $\boxed{\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Ker}(\psi).}$
   ($\Leftarrow$) On suppose que $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Ker}(\psi)$.
   Soit $x \in E$. On peut écrire $x = y + \lambda u$ avec $y \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :
   $$\varphi(x) = \varphi(\underbrace{y}_{\in \mathrm{Ker}(\varphi)} + \lambda u) = \lambda\varphi(u).$$
   On a également :
   $$\psi(x) = \psi(\underbrace{y}_{\in \mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Ker}(\psi)} + \lambda u) = \lambda\psi(u).$$
   Puisque $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Ker}(\psi)$ et puisque $u \notin \mathrm{Ker}(\varphi)$, on a nécessairement $\psi(u) \neq 0$. Donc, pour tout $x \in E$, on a :
   $$\varphi(x) = \lambda\varphi(u) = \lambda\frac{\varphi(u)}{\psi(u)}\psi(u) = \frac{\varphi(u)}{\psi(u)}\psi(x).$$
   $\boxed{\text{Donc } \varphi \text{ et } \psi \text{ sont proportionnelles.}}$

Exercice 25 - QSP ESCP 2004 ⋆⋆⋆⋆

Montrons le résultat par l'absurde. Supposons que $\mathrm{Im}f + \mathrm{Im}g$ n'est pas directe.
On a donc $\dim \mathrm{Im}f \cap \mathrm{Im}g \geqslant 1$. Et donc $\dim \mathrm{Im}f + \dim \mathrm{Im}g > n$.
On applique le théorème du rang et on obtient :
$$\begin{cases} \dim \mathrm{Im}(f) + \dim \mathrm{Ker}(f) &= \dim E \\ \dim \mathrm{Im}(g) + \dim \mathrm{Ker}(g) &= \dim E \end{cases}.$$
On calcule alors :
$$\dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \mathrm{Ker}(g) = \dim E - \dim \mathrm{Im}(f) + \dim E - \dim \mathrm{Im}(g) = 2n - (\dim \mathrm{Im}f + \dim \mathrm{Im}g) < n.$$
Or $\dim \mathrm{Ker}f + \dim \mathrm{Ker}g \geqslant n$ puisque $\mathrm{Ker}f + \mathrm{Ker}g = E$. $\boxed{\text{Absurde.}}$
Donc $\boxed{\text{la somme } \mathrm{Im}f + \mathrm{Im}g \text{ est directe.}}$
On montre de même que $\boxed{\text{la somme } \mathrm{Ker}f + \mathrm{Ker}g \text{ est directe.}}$

Exercice 26 - Oral ESCP 2012 ⋆⋆⋆⋆⋆

1. (a) Procédons par analyse-synthèse.
   - **Analyse :** Soit $i \in [\![1, n]\!]$. On suppose qu'il existe un polynôme $L_i \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, on ait : $L_i(a_j) = \delta_{i,j}$.
     Donc pour tout $j \neq i$, on a $L_i(a_j) = 0$. Donc les a_j (tous distincts) sont des racines de L_i. On en déduit :
     $$L_i = Q \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (X - a_j)$$
     où Q est un polynôme. Puis par considération sur les degrés, on a $\deg Q \leqslant 0$, puisque $\deg \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (X - a_j) = n - 1$.
     On peut donc écrire :
     $$L_i = \lambda \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} (X - a_k)$$
     avec $\lambda \in \mathbb{R}$. De plus, on a $L_i(a_i) = 1$. En réinjectant, on obtient :
     $$\lambda \prod_{\substack{j=1 \\ k \neq i}}^{n} (a_i - a_k) = 1$$
     D'où :
     $$\boxed{L_i = \frac{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} (X - a_k)}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} (a_i - a_k)} = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \frac{X - a_k}{a_i - a_k}.}$$
     $\boxed{\text{L'analyse prouve l'unicité.}}$
   - **Synthèse :** Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on pose $L_i = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \frac{X - a_k}{a_i - a_k}$.
     Pour $j \in [\![1, n]\!]$, on calcule :
     $$L_i(a_j) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \frac{a_j - a_k}{a_i - a_k}$$
     - **Si** $j \neq i$**,** alors il existe un k tel que $a_j - a_k = 0$ et alors :
       $$\boxed{L_i(a_j) = 0.}$$
     - **Si** $j = i$**,** alors :
       $$\boxed{L_i(a_j) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \frac{a_j - a_k}{a_i - a_k} = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \frac{a_i - a_k}{a_i - a_k} = 1.}$$

     De plus $\boxed{\deg L_i = n - 1.}$
     $\boxed{\text{La synthèse prouve l'existence.}}$

   (b) Montrons que la famille $(L_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ est libre.
   Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que :
   $$\lambda_1 L_1 + \cdots + \lambda_n L_n = 0.$$
   Montrons que $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$.
   Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Évaluons en a_i :
   $$\lambda_1 \underbrace{L_1(a_i)}_{=0} + \cdots + \lambda_{i-1} \underbrace{L_{i-1}(a_i)}_{=0} + \lambda_i \underbrace{L_i(a_i)}_{=1} + \lambda_{i+1} \underbrace{L_{i+1}(a_i)}_{=0} + \cdots + \lambda_n \underbrace{L_n(a_i)}_{=0} = 0.$$
   Donc $\boxed{\lambda_i = 0.}$ Donc $\boxed{\text{la famille des } (L_i)_{i \in [\![1,n]\!]} \text{ est libre.}}$
   Puis comme son cardinal est n et $\dim \mathbb{R}_{n-1}[X] = n$, $\boxed{\text{c'est une base de } \mathbb{R}_{n-1}[X].}$

2. (a) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$\pi(P)(a_k) = \sum_{i=1}^{n} P(a_i) \underbrace{L_i(a_k)}_{\delta_{i,k}} = P(a_k).$$

Donc :

$$\pi(\pi(P)) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\pi(P)(a_i)}_{P(a_i)} L_i = \pi(P).$$

D'où $\boxed{\pi \circ \pi = \pi}$, c'est-à-dire $\boxed{\pi \text{ est un projecteur.}}$

(b) Soit $P \in \text{Ker}\pi$. On a donc :

$$\sum_{i=1}^{n} P(a_i) L_i = 0.$$

Or les L_i forment une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et forment donc une famille libre. C'est donc équivalent à pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $P(a_i) = 0$.

Dit autrement $P \in \text{Ker}\pi$ si et seulement si il peut s'écrire :

$$P = Q \prod_{i=1}^{n} (X - a_i)$$

Donc $\boxed{\text{Ker}\pi = F}$ où F est l'ensemble défini à la question suivante.

Ensuite, comme tous les L_i sont dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, on a $\text{Im}(\pi) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$. De plus $\pi(L_k) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(L_k)(a_i)}_{\delta_{k,i}} L_i =$ L_k. Donc puisque les L_k engendrent $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, on a aussi $\mathbb{R}_{n-1}[X] \subset \text{Im}(\pi)$.

D'où finalement $\boxed{\text{Im}(\pi) = \mathbb{R}_{n-1}[X].}$

(c) π est un projecteur donc $\boxed{\mathbb{R}[X] = \text{Ker}(\pi) \oplus \text{Im}(\pi) = F \oplus \mathbb{R}_{n-1}[X].}$

(d) Si $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, alors $P \in \text{Im}(\pi)$. Donc $P = \pi(P)$.

On en déduit : $P = \sum_{i=1}^{n} P(a_i) L_i$. Donc $\boxed{\text{ses coordonnées sont } (P(a_1), \ldots, P(a_n)).}$

3. (a) ϵ est linéaire car l'évaluation des polynômes est linéaire.

ϵ est bijective puisque c'est l'application qui a un polynôme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ associe ses coordonnées dans la base $(L_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$.

$\boxed{\epsilon \text{ est donc bien un isomorphisme.}}$

(b) Cela revient à dire que $(f(a_1), \ldots, f(a_n))$ admet un unique antécédent dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ par ϵ. $\boxed{\text{C'est le cas,}}$ puisque ϵ est bijective.

4. (a) *L'énoncé n'est pas très bien rédigé en termes de quantificateurs... Enfin bon. C'est l'exemple à ne pas suivre.*

Pour $K \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(x) - P(x) - K \prod_{i=1}^{n} (x - a_i) = 0 \Leftrightarrow K = \frac{f(x) - P(x)}{\prod_{i=1}^{n} (x - a_i)}.$$

Comme x est distinct des a_i, le dénominateur est bien non nul et $\boxed{\text{un tel } K \text{ existe.}}$

(b) *Quelle horreur à rédiger ! L'idée est d'appliquer en série le théorème de Rolle. En effet, on a plusieurs points d'annulation de φ (en chacun des a_i et en x). La dérivée s'annulle donc au moins une fois entre les couples de points d'annulation consécutifs. Si φ s'annule k fois alors φ' s'annule (au moins) $k-1$ fois. On réitère le raisonnement pour trouver que $\varphi^{(2)}$ a au moins $k-2$ points d'annulations. Et on peut de proche en proche conclure sur $\varphi^{(n)}$. Maintenant rédigeons-le.*

On pose pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$H_k : \text{« si } k \leqslant n \text{ alors } \varphi^{(k)} \text{ admet au moins } n - k + 1 \text{ points d'annulation dans } [a, b] \text{ ».}$$

Montrons cette proposition par récurrence sur k :

- **Initialisation :** pour $k = 0$, on a $k \leqslant n$. Et on a bien $\varphi^{(0)} = \varphi$ qui admet $n - k + 1 = n + 1$ points d'annulation. En effet, on a déjà x trouvé à la question précédente.
  Et pour $j \in [\![1, n]\!]$:
  $$\varphi(a_j) = \underbrace{f(a_j) - P(a_j)}_{=0} - K \prod_{i=1}^{n} \underbrace{(a_j - a_i)}_{=0 \text{ si } j=i} = 0.$$
  Ainsi $\boxed{H_0 \text{ est vérifiée.}}$
- **Hérédité :** Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose H_k vraie. Montrons H_{k+1}.
  On distingue deux cas :
  i. Si $k \geqslant n$ alors $k + 1 > n$ et donc H_{k+1} est vérifiée.
  ii. Si $k < n$ alors $k + 1 \leqslant n$. Il faut vérifier que $\varphi^{(k+1)}$ admet $n - (k + 1) + 1 = n - k$ points d'annulations.
  Par hypothèse de récurrence, $\varphi^{(k)}$ admet $n-k+1$ points d'annulations. Notons les b_1, ..., b_{n-k+1} avec $b_1 < b_2 < \cdots < b_{n-k+1}$.
  Ainsi pour tout $j \in [\![1, n-k]\!]$, on a $\varphi^{(k)}(b_j) = \varphi^{(k)}(b_{j+1}) = 0$. Comme φ est $\mathcal{C}^n$ (comme sommes et produits), $\varphi^{(k)}$ est au moins $\mathcal{C}^1$ (pour $k < n$). Donc le théorème de Rolle s'applique. Ainsi, il existe $c_j \in]b_j, b_{j+1}[$ tel que $\varphi^{(k+1)}(c_j) = 0$.
  Ainsi $\boxed{\varphi^{(k+1)} \text{ a bien (au moins) } n - k + 1 - 1 = n - k \text{ points d'annulation distincts dans } [a, b].}$

Ainsi en particulier H_n est vrai. Et donc $\boxed{\text{il existe } \zeta \in [a, b] \text{ tel que } \varphi^{(n)}(\zeta) = 0.}$

Rédaction alternative : *j'ai fait exprès de rédiger avec une récurrence pour rester dans le programme. Mais, la chose naturelle à faire est une* ***descente finie****. C'est la même chose, sauf que l'on s'arrête à un certain rang.*

On pose pour tout $k \in [\![1, n]\!]$:
$$H_k : \text{« } \varphi^{(k)} \text{ admet au moins } n - k + 1 \text{ points d'annulation dans } [a, b] \text{ ».}$$
Montrons cette proposition par descente finie pour tout $k \in [\![1, n]\!]$:

- **Initialisation :** pour $k = 0$, on a bien $\varphi^{(0)} = \varphi$ qui admet $n - k + 1 = n + 1$ points d'annulation. En effet, [...]
- **Hérédité :** Soit $k \in [\![1, n - 1]\!]$. On suppose H_k vraie. Montrons H_{k+1}.
  Il faut vérifier que $\varphi^{(k+1)}$ admet $n - (k + 1) + 1 = n - k$ points d'annulations. [...]

Ainsi en particulier H_n est vrai. Et donc $\boxed{\text{il existe } \zeta \in [a, b] \text{ tel que } \varphi^{(n)}(\zeta) = 0.}$

*Je profite de cette question pour aborder des points de rédaction mais ça ne doit pas vous paniquer : c'est un sujet d'**oral** de concours. Si vous êtes capables d'expliquer clairement une idée avec des expressions comme « de proche en proche », ce ne sera pas parfait, mais ça sera très bien.*

(c) Avec les notations des questions précédentes, on a :
$$\varphi^{(n)}(t) = f^{(n)}(t) - \underbrace{P^{(n)}(t)}_{=0 \text{ car } P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]} - n!K.$$
En ζ, on trouve :
$$f^{(n)}(\zeta) - n!K = 0.$$
Donc $\boxed{K = \frac{f^{(n)}(\zeta)}{n!}.}$

Toujours x avec le K correspondant :
$$|f(x) - P(x)| = \left| \underbrace{\varphi(x)}_{=0} + \underbrace{K}_{= \frac{f^{(n)}(\zeta)}{n!}} \prod_{i=1}^{n} (x - a_i) \right| = \frac{|f^{(n)}(\zeta)|}{n!} \prod_{i=1}^{n} |x - a_i|.$$

On peut alors majorer :

$$|f(x)-P(x)| \leqslant \frac{\sup_{[a,b]}|f^{(n)}|}{n!}\prod_{i=1}^{n}|x-a_i|.$$

Mais x ici est (presque) quelconque. La seule hypothèse était que $x \neq a_i$ pour chacun des a_i.
Mais pour a_i, on a $f(a_i)-P(a_i)=0$ et donc l'inégalité est bien vérifiée.
Ainsi, pour tout $x \in [a,b]$, on a :

$$\boxed{|f(x)-P(x)| \leq \frac{\prod_{i=1}^{n}|x-a_i|}{n!}\sup_{[a,b]}|f^{(n)}|.}$$

Exercice 27 - Oral ESCP 2019 ⋆⋆⋆⋆⋆

1. (a)
   - **Si $r=0$,** alors $u=0$. Dans ce cas $\boxed{\text{n'importe quel } w \text{ convient.}}$
   - **Si $r=n$,** alors u est bijectif. Dans ce cas, $\boxed{\text{on pose } w=u^{-1}.}$ On a alors $u\circ w\circ u = u\circ u^{=1}\circ u = u$.

   (b) i. D'après le théorème du rang, on a :

$$\dim \operatorname{Ker}(u) = \dim(E)-\operatorname{rg}(u) = n-r.$$

Soit H un supplémentaire de $\operatorname{Ker}(u)$ dans E (qui est donc de dimensions r).
Notons $\boxed{(e_1,\dots,e_r,e_{r+1},\dots,e_n) \text{ une base adaptée à la décomposition } H\oplus\operatorname{Ker}(u).}$
Ainsi $(e_{r+1},\dots,e_n)$ est une base de $\operatorname{Ker}(u)$. On a donc bien $\boxed{\text{pour tout } i\in[\![r+1,n]\!],\ u(e_i)=0.}$
Montrons désormais que $(u(e_1),\dots,e(u_r))$ est libre.
Soit $(\lambda_1,\dots,\lambda_r)\in\mathbb{R}^r$. On suppose que :

$$\lambda_1 u(e_1)+\cdots+\lambda_r u(e_r)=0.$$

Donc par linéarité :

$$u(\lambda_1 e_1+\cdots+\lambda_r e_r)=0.$$

que l'on peut écrire $\lambda_1 e_1+\cdots+\lambda_r e_r\in\operatorname{Ker}(u)$.
Or $(e_1,\dots,e_r)$ est une base de H. Donc :

$$\lambda_1 e_1+\cdots+\lambda_r e_r\in\operatorname{Ker}(u)\cap H.$$

Or la somme $\operatorname{Ker}(u)\oplus H$ est directe donc $\operatorname{Ker}(u)\cap H=\{0\}$. Ainsi $\lambda_1 e_1+\cdots+\lambda_r e_r=0$.
Comme $(e_1,\dots,e_r)$ est une base, c'est une famille libre et donc :

$$\boxed{\lambda_1=\cdots=\lambda_r=0.}$$

Ainsi $\boxed{(u(e_1),\dots,u(e_r)) \text{ est une famille libre.}}$

ii. On a $\operatorname{Im}(u)=\operatorname{Vect}(u(e_1),\dots,u(e_r),\underbrace{u(e_{r+1}),\dots,u(e_n)}_{=0})=\operatorname{Vect}(u(e_1),\dots,u(e_r))$. Soit K un supplémentaire de $\operatorname{Im}(u)$ (de dimension $n-r$).
$(u(e_1),\dots,u(e_r))$ est une base de $\operatorname{Im}(u)$. On la complète en une base de E adapté à la décomposition $\operatorname{Im}(u)\oplus K$. Notons cette base $(u(e_1),\dots,u(e_r),y_{r+1},\dots,y_n)$.
Un endomorphisme est entièrement défini par l'image d'une base. On définit ainsi w par :

$$\boxed{\begin{cases} \forall i\in[\![1,r]\!],\ w(u(e_i)) &= e_i \\ \forall i\in[\![r+1,n]\!],\ w(y_i) &= 0 \end{cases}}$$

Vérifions maintenant que $u\circ w\circ u=u$ en regardant les images de la base $(e_1,\dots,e_n)$.

Pour $i \in [\![1, r]\!]$, on a :

$$u \circ w \circ u(e_i) = u(\underbrace{w(u(e_i))}_{=e_i}) = u(e_i)$$

et pour $i \in [\![r+1, n]\!]$, on a :

$$u \circ w \circ u(e_i) = u(w(\underbrace{u(e_i)}_{=0})) = 0 = u(e_i).$$

Donc, on a bien $\boxed{u \circ w \circ u = u.}$

w semble sortir du chapeau et c'est un peu le cas. On ne peut pas utiliser d'analyse synthèse car il n'y a pas une unique solution.

Mais la première question est là pour nous guider. Si $r = n$, on voit qu'on n'a pas vraiment le choix pour w. Au contraire, le choix est absolu pour $r = 0$. En fait, w semble détricoter u. Mais il ne peut pas entièrement car u n'est pas inversible.

On pose alors un truc qui ressemble le plus possible à u^{-1}. Pour la partie de E qui n'est pas le noyau (H avec notre correction), on écrit essentiellement l'inverse. Et pour le reste, on fait à peu près ce que l'on veut.

2. (a) Pour simplifier la rédaction, on fixe f et on pose :

$$H_m : \text{« } \forall g \in \mathcal{L}(E),\ (\Phi_f)^m(g) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} f^{m-k} \circ g \circ f^k \text{ »}.$$

On rentre ainsi le quantificateur sur g dans la proposition à montrer pour tout m.

- **Initialisation :** pour $m = 1$, et pour $g \in \mathcal{L}(E)$, on a :

$$(\Phi_f)^m(g) = \Phi_f(g) = f \circ g - g \circ f$$

et :

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} f^{m-k} \circ g \circ f^k = (-1)^0 \binom{1}{0} f^{1-0} \circ g \circ f^0 + (-1)^1 \binom{1}{1} f^{1-1} \circ g \circ f^1 = f \circ g - g \circ f.$$

Donc, on a bien $\boxed{(\Phi_f)^m(g) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} f^{m-k} \circ g \circ f^k.}$

- **Hérédité :** Soit $m \in \mathbb{N}^\star$. On suppose que pour tout $g \in \mathcal{L}(E)$:

$$(\Phi_f)^m(g) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} f^{m-k} \circ g \circ f^k.$$

Montrons que la relation tient pour $m + 1$.

Soit $g \in \mathcal{L}(E)$. On a :

$$\begin{aligned}
(\Phi_f)^{m+1}(g) &= (\Phi_f)^m(\Phi_f(g)) \\
&= \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} f^{m-k} \circ \Phi_f(g) \circ f^k \\
&= \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} f^{m-k} \circ (f \circ g - g \circ f) \circ f^k \\
&= \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} f^{m-k+1} \circ g \circ f^k - \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} f^{m-k} \circ g \circ f^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} f^{(m+1)-k} \circ g \circ f^k + \sum_{k=0}^{m} (-1)^{k+1} \binom{m}{k} f^{(m+1)-(k+1)} \circ g \circ f^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} f^{(m+1)-k} \circ g \circ f^k + \sum_{k'=1}^{m+1} (-1)^{k'} \binom{m}{k'-1} f^{(m+1)-k'} \circ g \circ f^{k'} \\
&= \underbrace{\binom{m}{0}}_{=\binom{m+1}{0}} f^{(m+1)-0} \circ g \circ f^0 \\
&\quad + \sum_{k=1}^{m} (-1)^k \underbrace{\left(\binom{m}{k} + \binom{m}{k-1}\right)}_{=\binom{m+1}{k}} f^{(m+1)-k} \circ g \circ f^k \\
&\quad + \underbrace{\binom{m}{(m+1)-1}}_{\binom{m+1}{m+1}} f^{(m+1)-(m+1)} \circ g \circ f^{m+1} \\
&= \boxed{\sum_{k=0}^{m+1} (-1)^k \binom{m+1}{k} f^{(m+1)-k} \circ g \circ f^k.}
\end{aligned}$$

(b) Si $m = 2p-1$, alors pour $k \in [\![0, p-1]\!]$, $m-k \geqslant p$ et pour $k \in [\![p, m]\!]$, $k \geqslant p$. Dans tous les cas, on a soit $f^{m-k} = 0$, soit $f^k = 0$. Donc pour tout $g \in \mathcal{L}(E)$:

$$\boxed{(\Phi_f)^{2p-1}(g) = 0.}$$

3. Soit w un endomorphisme tel que $f^{p-1} \circ w \circ f^{p-1} = f^{p-1}$.
On a :

$$(\Phi_f)^{2p-2}(w) = \sum_{k=0}^{2p-2} (-1)^k \binom{2p-2}{k} f^{2p-2-k} \circ w \circ f^k$$

Si $k < p-1$, alors $2p-2-k > p-1$ et donc f^{2p-2-k}.
Si $k > p-1$, alors $f^k = 0$.
Donc, seul le terme $k = p-1$ est non nul. On a donc :

$$(\Phi_f)^{2p-2}(w) = (-1)^{p-1} \binom{2p-2}{p-1} f^{p-1} \circ w \circ f^{p-1} = (-1)^{p-1} \binom{2p-2}{p-1} f^{p-1}.$$

Et donc :

$$\boxed{f^{p-1} = (\Phi_f)^{2p-2}\left(\frac{w}{(-1)^{p-1}\binom{2p-2}{p-1}}\right).}$$

Ainsi $\boxed{f^{p-1} \in \mathrm{Im}((\Phi_f)^{2p-2}).}$

4. On a déjà vu que $(\Phi_f)^{2p-1} = 0$. De plus, $f^{p-1} \in \mathrm{Im}((\Phi_f)^{2p-2})$ et $f^{p-1} \neq 0$. Donc $(\Phi_f)^{2p-2} \neq 0$.
   Ainsi $\boxed{\text{l'indice de nilpotence de } \Phi_f \text{ est } 2p-1.}$