

TD4 - INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES - CORRECTION

1 Intégration sur un segment

Exercice 1 - Un changement classique

★

1. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, on a :

$$\sin(t) = \frac{2 \tan\left(\frac{t}{2}\right)}{1 + \tan\left(\frac{t}{2}\right)^2} \quad \text{et} \quad \cos(t) = \frac{1 - \tan\left(\frac{t}{2}\right)^2}{1 + \tan\left(\frac{t}{2}\right)^2}.$$

2. Soit $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et $\theta \in]0, \frac{\pi}{4}[$. En posant le changement de variable $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$ déterminer :

$$A = \int_0^x \frac{1}{\cos(t)} dt$$

et :

$$B = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1 + \cos(\theta) \cos(t)} dt.$$

Exercice 2 - IPP

★★

En utilisant des intégrations par parties, calculer les intégrales suivantes :

$$A = \int_0^1 x^2 \arctan(x) dx, \quad B = \int_1^{e^\pi} \cos(\ln(x)) dx,$$

$$C = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^4(x)}, \quad D = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x \ln(x) dx}{(x^2 + 1)^2},$$

$$E = \int_0^1 x^\lambda \ln(x)^n dx, \quad (\lambda > 0 \text{ et } n \in \mathbb{N})$$

$$F = \int_0^\pi \operatorname{ch}(t) \sin(2t) dt, \quad G = \int_0^\pi (x^2 + 2x + 2) \cos(2x) dx,$$

$$H = \int_2^3 (3x^2 - 4x + 1) \ln(x^5 - x^4) dx, \quad I = \int_0^x \arctan(t) dt,$$

$$J = \int_0^1 (x + 1) \arctan(x) dx.$$

Exercice 3 - Sommes de Riemann

★★

Déterminer les limites suivantes :

$$A = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1 + \frac{k}{n}}, \quad B = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos^2\left(\frac{k\pi}{n}\right),$$

$$C = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2kn}}.$$

Exercice 4 - Changement de variable

En utilisant les changements de variables indiqués, calculer les intégrales suivantes :

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x + \sin(x)} dx, \quad (t = x + \sin(x)) \\
 B &= \int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx, \quad (t = \sqrt{x+1}) \\
 C &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x) + \cos(x)}{2 - \sin(2x)} dx, \quad (t = \sin(x) - \cos(x)) \\
 D &= \int_1^2 \frac{dx}{x(x^n + 1)} \text{ où } n \in \mathbb{N}^*, \quad (t = 1/x) \\
 E &= \int_{\ln(2)}^{\ln(5)} \frac{e^x dx}{(3 + e^x)\sqrt{e^x - 1}}, \quad (t = \sqrt{e^x - 1}) \\
 F &= \int_1^{\sqrt{2}} \frac{x^2 + 1}{x\sqrt{x^4 - x^2 + 1}} dx, \quad \left(t = x - \frac{1}{x}\right) \\
 G &= \int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{(x - x^3)^{\frac{1}{3}}}{x^4} dx, \quad (t = 1/x) \\
 H &= \int_{\frac{1}{a}}^a \frac{\ln(x)}{1 + x^2} dx \text{ où } a > 0, \quad (t = 1/x), \\
 I &= \int_0^1 \frac{1 + \sqrt{x}}{1 + x^{\frac{1}{3}}} dx, \quad (t = x^{1/6}) \\
 J &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^7(x) dx, \quad (t = \sin(x)) \\
 K &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^7(x) dx. \quad (t = \tan(x))
 \end{aligned}$$

2 Intégrales impropres**Exercice 5**

★

Prouver la convergence des intégrales suivantes et calculer leur valeur :

$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^{+\infty} t e^{-\frac{t^2}{\sigma^2}} dt, \quad B = \int_0^1 \ln(t) dt, \\
 C &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x} e^{-e^{-x}} dx, \quad D = \int_0^{+\infty} e^{-2t} \cos t dt, \\
 E &= \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(t+1)}.
 \end{aligned}$$

Exercice 6

★★

Déterminer la nature et le cas échéant la valeur des intégrales suivantes :

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t \ln(t^2)}{1 + t^4} dt, \quad B = \int_{-\infty}^{+\infty} \ln\left(\frac{1}{t^2}\right) \frac{1}{t} dt, \\
 C &= \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-t^2} dt.
 \end{aligned}$$

Exercice 7 - Pour l'algèbre bilinéaire

★★

1. Montrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} P(t)^2 e^{-t^2} dt$$

est convergente. Montrer alors qu'elle est positive.

2. À quelle condition sur P a-t-on :

$$\int_0^{+\infty} P(t)^2 e^{-t^2} dt = 0 ?$$

Exercice 8

★★

Soit α un réel strictement positif et $n \in \mathbb{N}$. Montrer la convergence et calculer la valeur de :

$$\int_0^{+\infty} t^n e^{-\alpha t} dt.$$

Exercice 9

★★

Justifier l'existence de :

$$\int_0^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) dx$$

et calculer sa valeur par une intégration par partie.

Exercice 10

★★★

Déterminer la nature des intégrales suivantes :

$$A = \int_0^1 \frac{1-x}{\ln x} dx, \quad B = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{1+e^t}},$$

$$C = \int_0^{+\infty} \frac{u \ln u}{(1+u^2)^{3/2}} du, \quad D = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+2t)\sqrt{t}}.$$

Exercice 11

★★★

Montrer que $\int_0^{+\infty} \ln(t) e^{-t} dt$ converge et est négative.

3 Changements de variables**Exercice 12**

★★

Soit α un réel positif.

1. Déterminer deux constantes λ et μ telles que pour tout $t > 0$:

$$\frac{1}{t(t+a)} = \frac{\lambda}{t} + \frac{\mu}{t+a}.$$

2. À l'aide du changement de variable $x = e^t$, prouver la convergence de :

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{e^t + a}$$

et calculer sa valeur.

Exercice 13

★★

Déterminer la nature et le cas échéant la valeur des intégrales suivantes grâce au changement de variable indiqué.

$$A = \int_1^{+\infty} \frac{\arctan\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2} dt, \quad (u = 1/t)$$

$$B = \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}} dt, \quad (u = \sqrt{t})$$

$$C = \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2} dt, \quad (x = 1/t)$$

$$D = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}}. \quad (t = e^x)$$

Exercice 14 - Intégrale de Fesnel

★★★

À l'aide du changement de variable $u = t^2$, puis d'une intégration par parties, montrer que $\int_0^{+\infty} \sin(t^2) dt$ converge.

4 Fonction Γ et intégrales à paramètre

Exercice 15

★★

On pose :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)} \end{cases}.$$

1. Justifier que f est bien définie.
2. Montrer que f est dérivable sur $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$ et déterminer f' . En déduire les variations de f .
3. Pour $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, calculer $\int_x^{x^2} \frac{dt}{t \ln(t)}$. En déduire que $f(x)$ est compris entre $x \ln(2)$ et $x^2 \ln(2)$. En déduire les limites de f en 0, en 1 et en $+\infty$.

Exercice 16 - Γ aux demi-entiers

★★★

On rappelle que l'intégrale de Gauss vaut :

$$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

1. En réalisant le changement de variable $u = \frac{t^2}{2}$ dans l'intégrale de Gauss, déterminer la valeur de $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.
2. En déduire que pour tout entier naturel n , on a :

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)! \sqrt{\pi}}{4^n n!}.$$

Exercice 17

Pour $x \in \mathbb{R}$, on note, sous réserve de convergence :

$$F(x) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-tx^2}}{1+t^3} dt.$$

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale définissant $F(x)$ converge. Ainsi F est une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que F est paire.
3. Étudier les variations de F sur $\mathbb{R}_+$ et calculer sa limite en $+\infty$. En déduire le tableau de variations de F (on ne demande pas la valeur de $F(0)$).
4. (a) Montrer que pour tout $(a, b) \in (\mathbb{R}_+)^2$, on a :

$$|e^{-a} - e^{-b}| \leq |a - b|.$$

- (b) En déduire que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$|F(x) - F(y)| \leq |x^2 - y^2|.$$

- (c) En déduire que F est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 18

Soit $\alpha > 0$. On pose, sous réserve de convergence :

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt \quad \text{et} \quad J = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t) - \cos(\alpha t)}{t} dt.$$

1. Montrer que les intégrales I et J convergent.
2. Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, on a :

$$\int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{\cos(t) - \cos(\alpha t)}{t} dt = \int_{\epsilon}^{\alpha\epsilon} \frac{\cos t}{t} dt.$$

3. En déduire que $J = \ln(\alpha)$.

Exercice 19 - $\zeta(2)$

On admet dans cet exercice que :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose sous réserve de convergence :

$$I_n = \int_0^{+\infty} f(x) e^{-nx} dx.$$

1. Montrer que pour tout $n \geq 0$, I_n est convergente et que : $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n}$.
2. Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a $f(x) = f(x)e^{-nx} + \sum_{k=1}^n x e^{-kx}$.
3. En déduire que :

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = \frac{\pi^2}{6}.$$

4. À l'aide du changement de variable $x = -\ln(t)$, prouver la convergence de :

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t} dt$$

et calculer sa valeur.

5 Exercices de concours

Exercice 20 - Ecricome 1993

★★

Justifier l'existence et calculer la valeur de :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^{3/2}} dt.$$

Exercice 21 - Ecricome 1994

★★

Pour $k \in \mathbb{N}$, à l'aide du changement de variable $x = -(k+1) \ln t$, montrer que :

$$\int_0^1 t^k (\ln t)^k dt$$

converge et donner sa valeur.

Exercice 22 - QSP ESCP 2016

★★★★★

Soit f une fonction continue sur $[1, +\infty[$ telle que $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ converge. Montrer que :

$$\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$$

converge également.

Exercice 23 - Oral ESCP 2013

★★★★★

1. Montrer que pour tout $x > 0$, l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{1 + xe^t} dt$$

converge. On note alors f l'application définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{1 + xe^t} dt$.

2. Montrer que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. (a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis un équivalent de $f(x)$ au voisinage de $+\infty$.
(b) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.
4. (a) En utilisant le changement de variable $u = xe^t$ que l'on justifiera, montrer que :

$$f(x) = \ln(x)(\ln(x) - \ln(1+x)) + \int_x^{+\infty} \frac{\ln u}{u(1+u)} du. \quad (1)$$

- (b) En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $f'(x)$. Retrouver ainsi le sens de variation de f .

Exercice 24 - Oral ESCP 2018

★★★★★

Pour tout entier $p \geq 1$, on définit la fonction $f_p : [1, +\infty[$ par :

$$f_p(t) = \frac{1}{t(t+1)(t+2) \cdots (t+p)}.$$

1. Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f_p(t) dt$ converge.

Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on pose alors :

$$I_p = \int_1^{+\infty} f_p(t) dt.$$

2. Pour tout $t \in [1, +\infty[$, étudier la convergence de la suite $(f_p(t))_{p \geq 1}$.
3. Déterminer la limite éventuelle de la suite $(I_p)_{p \geq 1}$.
4. Pour p fixé, on admet l'existence de nombres réels $\alpha_0, \dots, \alpha_p$ tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \llbracket -p, 0 \rrbracket, f_p(t) = \sum_{k=0}^p \frac{\alpha_k}{t+k}.$$

Montrer que pour tout $j \in \llbracket 0, p \rrbracket$, on a :

$$\alpha_j = \frac{(-1)^j}{j!(p-j)!}.$$

Indice : Pour tout $j \in \llbracket 0, p \rrbracket$, on pourra multiplier la relation admise par $(t+j)$ et choisir une valeur particulière de t .

5. Calculer $\sum_{k=0}^p \alpha_k$ et en déduire une expression de I_p sans intégrale sous forme d'une somme.

Exercice 25 - Oral ESCP 2018

★★★★★

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, les intégrales :

$$\int_0^{+\infty} \cos(xt)e^{-t^2} dt \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \sin(xt)e^{-t^2} dt$$

convergent.

On pose alors pour tout x réel :

$$C(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt)e^{-t^2} dt$$

et :

$$S(x) = \int_0^{+\infty} \sin(xt)e^{-t^2} dt.$$

2. (a) Montrer que les deux fonctions C et S sont continues sur $\mathbb{R}$.
(b) Montrer que pour tous réels u et h on a :

$$|\sin(u+h) - \sin(u) - h \cos(u)| \leq \frac{h^2}{2}.$$

- (c) En déduire que S est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer pour tout réel x , $S'(x)$.
3. Déterminer pour tout réel x , une relation entre $S'(x)$ et $S(x)$.
4. (a) Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Calculer la dérivée de :

$$g : \begin{cases} D_g & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto e^{\frac{x^2}{4}} f(x) \end{cases}.$$

En déduire les solutions de l'équation différentielle $2f'(x) + xf(x) = 0$.

- (b) On suppose qu'on peut écrire pour tout x réel $S(x) = A(x)e^{-\frac{x^2}{4}}$ avec A de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Établir la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R}, S(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4}}}{2} \int_0^x e^{\frac{t^2}{4}} dt.$$

5. Déterminer un équivalent de $S(x)$ au voisinage de $\pm\infty$.