# TD5 - Variables aléatoires à densité

## 1 Généralités

### Exercice 1 ⋆

Soit $F$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \frac{e^x}{e^x + e^{-x}}$. Montrer que $F$ est une fonction de répartition d'une variable à densité et en donner une densité.

### Exercice 2 ⋆

Soit $F$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(t) = \begin{cases} 1 - \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}.$$

1. Montrer que $F$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire $T$ à densité.
2. Déterminer une densité $f$ de $T$.

### Exercice 3 ⋆⋆

Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2 \\ \frac{a}{x \ln^2(x)} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}.$$

1. À quelle condition sur $a$, $f$ est-elle une densité ?
2. On suppose la condition précédente vérifiée. Soit $X$ une variable aléatoire à densité de densité $f$. Déterminer la fonction de répartition de $X$.

### Exercice 4 ⋆⋆

Soit $a > 0$.

1. Déterminer $\lambda \in \mathbb{R}$ pour que la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \begin{cases} \lambda t e^{-at} & \text{si } \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

soit une densité.

2. Soit $X$ une variable aléatoire de densité $f$ (avec $\lambda$ choisi comme déterminé précedemment). Déterminer la fonction de répartition de $X$.

### Exercice 5 ⋆⋆

Soit $X$ une v.a.r. de densité : $f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Montrer que $Y = X^2$ est une variable à densité et en déterminer une densité.

### Exercice 6 - Loi de Pareto ⋆⋆

Soit $a > 0$ et soit $f_a$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_a(t) = at^{-a-1}$ si $t \in [1, +\infty[$ et $f_a(t) = 0$ sinon.

1. Montrer que $f_a$ est une densité.
2. Soit $X$ une variable aléatoire ayant $f_a$ pour densité.
   (a) Déterminer la fonction de répartition de $X$.
   (b) $X$ possède-t-elle une espérance ? Si oui, la calculer. Même question pour la variance.
   (c) On pose $Y = \ln X$. Déterminer la fonction de répartition de $Y$. Quelle est la loi de $Y$ ?

## 2 Espérance et variance

### Exercice 7 ⋆⋆

On reprend la variable $X$ de l'exercice 3. Admet-elle une espérance ?

### Exercice 8 ⋆⋆

On reprend la variable $X$ de l'exercice 4. Admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

### Exercice 9 ⋆⋆

Soit $\alpha > 2$. On considère la fonction $f$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha - 1}{x^\alpha} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}.$$

1. Montrer que $f$ est une densité de probabilité d'une variable $X$.
2. Déterminer la fonction de répartition $F_X$.
3. Calculer l'espérance de $X$.

### Exercice 10 ⋆⋆

Soit $X$ une variable aléatoire de densité donnée par :

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & \text{si } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Montrer que $Y = \tan(X)$ est une variable à densité et en étudier l'espérance.

### Exercice 11 ⋆⋆⋆

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :
$$I_n = \int_0^{2\pi} x^n \sin(x)\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{2\pi} x^n \cos(x)\mathrm{d}x.$$
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = (n+1)J_n - (2\pi)^{n+1}$ et que $J_{n+1} = -(n+1)I_n$.
   (b) Calculer $I_n$ et $J_n$ pour $n \in [\![0,3]\!]$.
2. Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = \frac{x}{2\pi^2}(1-\cos(x))$ si $x \in [0, 2\pi]$ et $f(x) = 0$ sinon.
   (a) Montrer que $f$ est une densité d'une variable $X$.
   (b) Déterminer la fonction de réparation de $X$.
   (c) Déterminer $E(X)$ si elle existe.
   (d) Calculer les probabilités :
   - $P\left(X > \frac{\pi}{2}\right)$,
   - $P\left(|X-\pi| \leq \frac{\pi}{2}\right)$ et
   - $P_{[X \leq \frac{3\pi}{2}]}\left(X \geq \frac{\pi}{2}\right)$.

### Exercice 12 ⋆⋆⋆

1. (a) Soit $Z$ une variable aléatoire réelle à valeurs dans $]0,1[$, possédant une densité $g$ continue sur $]0,1[$. Montrer que $Z$ possède une espérance.
   (b) On suppose que pour tout $x \in ]0,1[$, $g(1-x) = g(x)$. Quelle est, dans ce cas, l'espérance de $Z$ ?
2. (a) Montrer que la fonction $x \mapsto \sin(x)$ réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1,1]$. On note $\varphi$ sa bijection réciproque.
   (b) Montrer que $\varphi$ est dérivable sur $]-1,1[$ et calculer sa dérivée.
   (c) Soit $I = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}}$. Montrer que cette intégrale converge et la calculer en utilisant un changement de variable affine.
3. (a) Montrer que la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
   est une densité de probabilité.
   (b) Soit $X$ une variable aléatoire réelle admettant $f$ pour densité. Déterminer $E(X)$ en utilisant la première question.
   (c) Retrouver le résultat en utilisant la définition de l'espérance et le changement de variable $x = (\sin(\theta))^2$.

## 3 Lois usuelles

### Exercice 13 ⋆

On considère une variable aléatoire $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$.

1. Quelle est la médiane de $X$ ? (valeur de $x$ telle que $F_X(x) = 1/2$)
2. On suppose que la durée d'une conversation téléphonique en minutes suit une loi exponentielle d'espérance 10.
   (a) Vous arrivez à une cabine téléphonique (ça existe encore !) dans laquelle quelqu'un vient d'entrer. Avec quelle probabilité devrez-vous attendre plus de 10 minutes ?
   (b) Vous êtes arrivés depuis 15 minutes. Quelle est la probabilité que vous attendiez au total 25 minutes ?

### Exercice 14 ⋆

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,n])$, $n \in \mathbb{N}^\star$. Déterminer la loi de $\lfloor X \rfloor$.

### Exercice 15 ⋆

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, $\lambda > 0$. Déterminer la loi de $Y = 1 + \lfloor X \rfloor$.

### Exercice 16 ⋆⋆

On reprend la variable $T$ de l'exercice 2. On pose pour tout réel $A > 0$ :
$$I(A) = \int_0^A t^2 \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t.$$
On note $\Phi$ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

1. Établir :
$$I(A) = -A\mathrm{e}^{-\frac{A^2}{2}} + \sqrt{2\pi}\left(\Phi(A) - \frac{1}{2}\right).$$
2. En déduire la limite de $I(A)$ lorsque $A \to +\infty$.
3. Calculer l'espérance de $T$.

### Exercice 17 ⋆⋆

Soit $X \hookrightarrow \gamma(\nu)$ et soit $Y = \frac{1}{X}$. À quelles conditions sur $\nu$, $Y$ admet-elle une variance ? Dans ce cas, calculer $V(Y)$.

### Exercice 18 ⋆⋆

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$. Montrer que $X$ admet des moments de tout ordre et les calculer.

## Exercice 19 ⋆⋆

En utilisant des lois normales bien choisies, calculer les intégrales suivantes :

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{8}(t^2+2t+1)}\mathrm{d}t \\ J &= \int_{-\infty}^{+\infty} t\mathrm{e}^{-\frac{1}{8}(t^2+2t+1)}\mathrm{d}t \\ K &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t^2+12t-16}\mathrm{d}t \\ L &= \int_{-\infty}^{+\infty} t^2\mathrm{e}^{-2t^2+12t-16}\mathrm{d}t \end{aligned}$$

## Exercice 20 ⋆⋆

1. Soit $\lambda > 0$ et soit $Z \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$. Soit enfin $F_Z$ sa fonction de répartition. On admet que $Y = F_Z(Z)$ est une variable aléatoire à densité. Déterminer la loi de $Y$.
2. Soit $X$ une variable aléatoire réelle dont la fonction de répartition $F_X$ est une bijection continue strictement croissante et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[0, 1]$. On admet que $Y = F_X(X)$ est une v.a.r. à densité. En déterminer la loi.

## Exercice 21 - Lois sans mémoire ⋆⋆⋆

Soit $X$ une variable aléatoire. On dit que la loi de $X$ est sans mémoire lorsque :

$$\forall (t, x) \in (\mathbb{R}_+)^2,\ P(X > t + s) = P(X > t)P(X > s).$$

1. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$. Montrer que $X$ est sans mémoire.
2. Soit $Y$ une variable aléatoire réelle de loi sans mémoire. On suppose que $P(Y > 0) > 0$. Montrer que pour tout $t > 0$ : $P(Y > t) > 0$.
3. On définit l'application $f : t \mapsto \ln(P(Y > t))$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $f(n) = nf(1)$.
   (b) En déduire que pour tout $q \in \mathbb{Q}_+$ : $f(q) = qf(1)$.
   (c) Soit $x \in \mathbb{R}_+$, on admet qu'il existe une suite de rationnels positifs $(q_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}_+^{\mathbb{N}}$ qui converge vers $x$. Montrer que $f(x) = xf(1)$.
4. Montrer que $Y$ suit une loi exponentielle.

## Exercice 22 ⋆⋆⋆

Soit $p$ un réel de $]0, 1[$ et $q = 1 - p$. Soient $\lambda$ et $\mu$ deux réels strictement positifs. Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} q\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ p\mu\mathrm{e}^{\mu x} & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

1. Vérifier que $f$ est une densité de probabilité.
2. Soit $X$ une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ dont $f$ est une densité. Calculer l'espérance $E(X)$.
3. (a) Déterminer les valeurs de $p$, $\lambda$ et $\mu$ telles que $X$ vérifie :
   $$\forall x \geq 0,\ P(X > x) = P(X < -x).$$
   (b) On pose alors $Y = |X|$. Déterminer la loi de $Y$.
   (c) A-t-on, pour tout réel $s$ et pour tout réel $t$ tel que $t \geq s$ :
   $$P_{[Y>s]}(Y > t) = P(Y > t - s)\ ?$$
4. Déterminer la fonction de répartition $F$ de $X$, puis son inverse $F^{-1}$.

## Exercice 23 ⋆⋆⋆

Soit $X$ une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(0, 1)$ et soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Pour quelle valeur de $a \in \mathbb{R}_+$, $P(a \leq X < na)$ est-elle maximale ?

## Exercice 24 ⋆⋆⋆

Soit $\Phi$ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. Étudier l'existence et le cas échéant calculer la valeur de :

$$\int_0^{+\infty} (1 - \Phi(t))\mathrm{d}t.$$

## 4 Exercices de concours

### Exercice 25 - EDHEC 2018 (modifié) ⋆⋆⋆

On considère une variable aléatoire $X$ suivant la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$ et on pose $Y=\sqrt{X}$.

1. On rappelle qu'en Python, la commande :

```
rd.exponential(1/mu)
```

du module `numpy.random` simule une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\mu$. Écrire une (ou des) commande(s) Python utilisant `rd.exponential` et permettant de simuler $Y$.

2. (a) Déterminer la fonction de répartition $F_Y$ de $Y$.
   (b) En déduire une densité $f_Y$ de $Y$.
3. (a) Rappeler la valeur du moment d'ordre 2 d'une variable aléatoire $Z$ suivant la loi normale centrée réduite.
   (b) En déduire que $Y$ possède une espérance et donner sa valeur.
4. On pose $U=1-\mathrm{e}^{\frac{X}{2}}$.
   (a) Vérifier que $U(\Omega)=[0,1[$.
   (b) Déterminer la fonction de répartition $F_U$ de $U$ et reconnaître la loi de $U$.
   (c) Exprimer $X$ en fonction de $U$ puis en déduire une simulation Python de $Y$ utilisant uniquement la fonction `rd.random`.

### Exercice 26 - QSP HEC 2009 ⋆⋆⋆⋆

Soit $U$ une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$, de loi uniforme sur $]0,1]$ et soit $q\in]0,1]$. Déterminer la loi de la variable aléatoire $X=1+\left\lfloor\frac{\ln U}{\ln q}\right\rfloor$. où $\lfloor x\rfloor$ désigne la partie entière de $x$.

### Exercice 27 - Oral ESCP 2019 ⋆⋆⋆⋆⋆

Soit $X$ une variable aléatoire à densité et $f$ une densité de $X$, supposée continue sur $\mathbb{R}$. On pose $Y=\frac{1}{X}$ et on admet que $Y$ est une variable aléatoire.

1. (a) Exprimer la fonction de répartition $F_Y$ de $Y$ en fonction de celle de $X$, notée $F_X$.
   (b) En déduire que $Y$ est une variable aléatoire à densité et préciser une densité $\varphi$ de $Y$.
2. Montrer que $Y$ admet une espérance si et seulement si les intégrales $\int_{-\infty}^{0}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t$ et $\int_{0}^{+\infty}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t$ sont convergentes, et qu'on a alors :
$$E(Y)=\int_{-\infty}^{0}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t+\int_{0}^{+\infty}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t.$$
On pourra utiliser le changement de variable $t=\frac{1}{y}$.
3. (a) Déterminer le réel $\alpha$ pour que la fonction $u$ définie sur $\mathbb{R}$ par $u(t)=\frac{\alpha}{1+t^2}$ soit une densité de probabilité.
   (b) Soit alors $U$ une variable aléatoire de densité $u$. Préciser une densité de $U'=\frac{1}{U}$. Les variables $U$ et $U'$ admettent-elles une espérance ?
4. Soit $V$ une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. Déterminer une densité de $V'=\frac{1}{V}$. Les variables aléatoires $V$ et $V'$ admettent-elles une espérance ?
5. Peut-on déterminer une densité $w$ telle que si $W$ est une variable aléatoire de densité $w$ et $W'=\frac{1}{W}$, alors $W$ et $W'$ admettent toutes les deux une espérance ?