TD5 - Variables aléatoires à densité - Correction

1 Généralités

Exercice 1 ⋆

- F est continue par opérations sur les fonctions usuelles.
- F est même $\mathcal{C}^1$ par opérations sur les fonctions usuelles.
- On a :
$$F(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^x}{e^x} \to 1.$$
- On a également :
$$F(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} \frac{e^x}{e^{-\infty}} \to 0.$$
- On a pour $x \in \mathbb{R}$: $F(x) = \frac{e^x}{e^x+e^{-x}} = \frac{1}{1+e^{-2x}}$. $x \mapsto e^{-2x}$ est une fonction décroissante, donc $x \mapsto 1+e^{-2x}$ aussi. Puis par composition de deux fonctions décroissantes, F est croissante.

$\boxed{\text{Ainsi } F \text{ est une fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.}}$

Comme F est dérivable sur $\mathbb{R}$, pour $x \in \mathbb{R}$, on calcule :
$$F'(x) = \frac{e^x(e^x+e^{-x}) - e^x(e^x-e^{-x})}{(e^x+e^{-x})^2} = \frac{2}{(e^x+e^{-x})^2}.$$

Ainsi la fonction :
$$\boxed{f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{2}{(e^x+e^{-x})^2} \end{array}\right.}$$

est une densité pour la variable décrite par F.

Exercice 2 ⋆

1.
- F est continue sur $\mathbb{R}_+^\star$ et $\mathbb{R}_-^\star$ par opérations sur les fonctions usuelles.
En 0, on a :
$$\lim_{x\to0^-} F(t) = \lim_{x\to0^-} 0 = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to0^+} F(t) = \lim_{x\to0^+} 1-\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) = 0.$$
Comme $F(0)=0$, F est également continue en 0.
- F est même $\mathcal{C}^1$ par opérations sur les fonctions usuelles sauf éventuellement en 0.
- On a :
$$\lim_{x\to+\infty} F(t) = \lim_{x\to+\infty} 1-\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) = 1.$$
- On a également :
$$\lim_{x\to-\infty} F(t) = \lim_{x\to-\infty} 0 = 0.$$
- F est constante sur $\mathbb{R}_-^\star$ donc croissante sur $\mathbb{R}_-^\star$.
Comme $t \mapsto -\frac{t^2}{2}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, par composition avec la fonction décroissante $1-\exp$, F est croissante sur $\mathbb{R}_+$.
De plus pour $t<0$ et $t' \geqslant 0$, on a : $F(t) = 0 \leqslant F(t')$ donc F est également croissante sur $\mathbb{R}$ entier.

Donc $\boxed{F \text{ est bien la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.}}$

2. Pour $t \in \mathbb{R}^\star$, on a :

$$F'(t) = \begin{cases} t\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}.$$

Donc la fonction :

$$\boxed{f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \begin{cases} t\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases} \end{cases}}$$

est une densité de T (la valeur en 0 est arbitraire).

Exercice 3 ⋆⋆

1. Si $x > 2$, on a $x\ln^2(x) > 0$. Pour que f soit une densité, il faut que f soit positive, donc nécessairement $a \geqslant 0$.
Comme f est continue sauf éventuellement en 2, on désormais l'équivalence suivante :

$$f \text{ densité} \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1.$$

On commence par remarquer que $\int_{-\infty}^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^2 0\mathrm{d}x = 0$. Donc l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ converge si et seulement si $\int_2^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ converge.
Pour $A \in [2, +\infty[$, on a :

$$\int_2^A f(x)\mathrm{d}x = \int_2^A \frac{a}{x\ln^2(x)}\mathrm{d}x = \left[-\frac{a}{\ln(x)}\right]_2^A = a\left(\frac{1}{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(A)}\right) \cdot \xrightarrow[A\to+\infty]{} \frac{a}{\ln(2)}.$$

Donc l'intégrale converge toujours. De plus :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \frac{a}{\ln(2)}.$$

Et en se référent à l'équivalence citée précédemment, on a $\boxed{f \text{ est une densité si et seulement si } a = \ln(2).}$

2. Si on note F la fonction de répartition de X, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)\mathrm{d}t.$$

Pour $x \leqslant 2$, on a donc $F(x) = 0$. Pour $x > 2$, on a :

$$\boxed{F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)\mathrm{d}t = \underbrace{\int_{-\infty}^2 f(t)\mathrm{d}t}_{=0} + \int_2^x f(t)\mathrm{d}t \underset{\text{calcul précédent}}{=} 1 - \frac{\ln 2}{\ln x}.}$$

Exercice 4 ⋆⋆

1. On commence à connaître la chanson : f est continue sauf éventuellement en 0, f est positive dès lors que $\lambda \leqslant 0$. Il faut donc vérifier l'intégrale.
On a :

$$\int_{-\infty}^0 f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^0 0\mathrm{d}t = 0.$$

Puis pour $A \in R_+^\star$:

$$\begin{array}{rcl} \int_0^A f(t)\mathrm{d}t & = & \int_0^A \lambda t\mathrm{e}^{-at}\mathrm{d}t \\ & = & \lambda \int_0^A \underbrace{t}_{=u(t)} \underbrace{\mathrm{e}^{-at}}_{=v'(t)} \mathrm{d}t \\ & \underset{\text{IPP}}{=} & \lambda \left[\underbrace{t}_{=u(t)} \underbrace{\frac{\mathrm{e}^{-at}}{-a}}_{=v(t)} \right]_0^A - \lambda \int_0^A \underbrace{1}_{=u'(t)} \times \underbrace{\frac{\mathrm{e}^{-at}}{-a}}_{=v(t)} \mathrm{d}t \\ & = & -\frac{\lambda A\mathrm{e}^{-aA}}{a} + \frac{\lambda}{a}\left[\frac{\mathrm{e}^{-at}}{-a}\right]_0^A \\ & = & -\frac{\lambda A\mathrm{e}^{-aA}}{a} - \frac{\lambda\mathrm{e}^{-aA}}{a^2} + \frac{\lambda}{a^2} \\ & \xrightarrow[A\to+\infty]{} & \frac{\lambda}{a^2}. \end{array}$$

Donc l'intégrale est convergente et elle vaut 1 si et seulement si $\boxed{\lambda = a^2.}$

2. On note F cette fonction de répartition. On a clairement :

$$F(x) = 0$$

si $x \leqslant 0$. Pour $x > 0$, on a :

$$\boxed{F(x) = \int_0^x a^2 t\mathrm{e}^{-at}\mathrm{d}t = -\frac{a^2 x\mathrm{e}^{-ax}}{a} - \frac{a^2\mathrm{e}^{-ax}}{a^2} + \frac{a^2}{a^2} = 1 - (1+ax)\,\mathrm{e}^{-ax}.}$$

Exercice 5 ⋆⋆

Y est bien une variable aléatoire réelle car c'est une fonction continue de X. Notons F_X la fonction de répartition de X et F_Y la fonction de répartition de Y. On a, pour $y \in \mathbb{R}$:

$$F_Y(y) = P(Y \leqslant y) = P(X^2 \leqslant y)$$

Si $y < 0$, on a $P(X^2 \leqslant y) = 0$ et donc $F_Y(y) = 0$.
Si $y \geqslant 0$, on a :

$$\begin{array}{rcl} F_Y(y) & = & P(X^2 \leqslant y) = P(-\sqrt{y} \leqslant X \leqslant \sqrt{y}) \\ & = & P(X \leqslant \sqrt{y}) - P(X < -\sqrt{y}) \\ & = & P(X \leqslant \sqrt{y}) - P(X \leqslant -\sqrt{y}) \text{ (car } X \text{ est à densité)} \\ & = & F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}). \end{array}$$

Or $F_X(x) = x$ si $x \in [0,1]$ et $F_X(x) = 1$ si $x > 1$. Donc :

$$\boxed{F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ \sqrt{y} - 0 & \text{si } y \in [0,1] \\ 1 & \text{si } y > 1 \end{cases}.}$$

F_Y est continue sur $\mathbb{R}$ (on peut le vérifier en 0 et en 1 également). F_Y est $\mathcal{C}^1$ sauf éventuellement en 0 et en 1. $\boxed{\text{Donc } Y \text{ est bien à densité.}}$
De plus pour $y \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$, on a :

$$F_Y'(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{y}} & \text{si } y \in]0,1[\\ 0 & \text{si } y > 1 \end{cases}$$

Ainsi la fonction :

$$\boxed{f_Y : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ y & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } y \leqslant 0 \text{ ou } y \geqslant 1 \\ \frac{1}{2\sqrt{y}} & \text{si } y \in]0,1[\end{array} \right. \end{array} \right.}$$

est une densité de Y.

Exercice 6 - Loi de Pareto ⋆⋆

1. f_a est continue sauf éventuellement en 1. f_a est également positive. Il suffit donc de vérifier la convergence et la valeur de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f_a(t)\mathrm{d}t$.
   On a $\int_{-\infty}^{1} f_a(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{1} 0\mathrm{d}t = 0$. Puis pour $A \in [1, +\infty[$, on a :
   $$\int_1^A f_a(t)\mathrm{d}t = \int_1^A at^{-a-1}\mathrm{d}t = \left[-t^{-a}\right]_1^A = 1 - t^{-A} \xrightarrow[A\to+\infty]{} 1.$$
   Donc l'intégrale converge et :
   $$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f_a(t)\mathrm{d}t = 1.}$$
   Ainsi $\boxed{f_a \text{ est bien une densité.}}$
2. (a) Notons F_a la fonction de répartition de X. On a pour $x \in \mathbb{R}$:
   $$F_a(x) = \int_{-\infty}^{x} f_a(t)\mathrm{d}t.$$
   Donc pour $x < 1$:
   $$\boxed{F_a(x) = \int_{-\infty}^{x} f_a(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} 0\mathrm{d}t = 0.}$$
   Puis pour $x \geqslant 1$:
   $$\begin{aligned} F_a(x) &= \int_{-\infty}^{x} f_a(t)\mathrm{d}t = \underbrace{\int_{-\infty}^{1} f_a(t)\mathrm{d}t}_{=0} + \int_1^x f_a(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_1^x at^{-a-1}\mathrm{d}t = \left[-t^{-a}\right]_1^x \boxed{= 1 - x^{-a}.} \end{aligned}$$

   (b) X possède une espérance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} tf_a(t)\mathrm{d}t$ converge absolument. Or :
   $$\int_{-\infty}^{1} tf_a(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{1} t \times 0\mathrm{d}t = 0$$
   et en $+\infty$, on a $tf_a(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} at^{-a}$. L'intégrale converge donc si et seulement si $a > 1$.
   Dans le cas de convergence, pour $A \in [1, +\infty[$, on a :
   $$\int_1^A tf_a(t)\mathrm{d}t = \int_1^A at^{-a}\mathrm{d}t = a\left[\frac{t^{-a+1}}{-a+1}\right]_1^A = \frac{a}{a-1}\left(1 - A^{1-a}\right) \xrightarrow[A\to+\infty]{} \frac{a}{a-1}.$$
   Donc X admet une espérance si et seulement si $a > 1$ et dans ce cas :
   $$\boxed{E(X) = \frac{a}{a-1}.}$$
   Pour la variance, on montrer de même que X admet un moment d'ordre deux si et seulement si $a > 2$. Dans ce cas, on a $E(X^2) = \frac{a}{a-2}$ et donc :
   $$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{a}{a-2} - \frac{a}{(a-1)^2}.$$

(c) Y est bien une variable aléatoire réelle car $X > 0$ presque sûrement et Y est une fonction continue de X.
Notons F_Y la fonction de répartition de Y. On a pour $y \in \mathbb{R}$:

$$F_Y(y) = P(Y \leqslant y) = P(\ln X \leqslant y) = P(X \leqslant \mathrm{e}^y).$$

On a donc :

$$\boxed{F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ 1 - \underbrace{(\mathrm{e}^y)^{-a}}_{=\mathrm{e}^{-ay}} & \text{si } y \geqslant 0 \end{cases}.}$$

On reconnaît $\boxed{\text{une loi } \mathcal{E}(a).}$

2 Espérance et variance

Exercice 7 ⋆⋆

Il faut vérifier si $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$ converge absolument.
Commençons par remarquer que :

$$\int_{-\infty}^{2} |xf(x)|\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{2} 0\mathrm{d}x = 0$$

et donc la convergence est déterminée par la convergence en $+\infty$.
Pour $x \geqslant 2$, on a :

$$xf(x) = \frac{a}{\ln^2 x}.$$

Or :

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{a}{\ln^2 x}} = \frac{\ln^2 x}{a\sqrt{x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

Donc $\frac{1}{\sqrt{x}} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{a}{\ln^2 x}\right)$.
Or l'intégrale de $\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ diverge (intégrale de Riemann). Donc nécessairement $\int_2^{+\infty} \frac{a}{\ln^2 x}\mathrm{d}x$ diverge également.
Comme tout est positif, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$ ne converge pas absolument non plus.
Donc $\boxed{X \text{ n'admet pas d'espérance.}}$

Exercice 8 ⋆⋆

Il faut vérifier si $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t$ converge absolument.
Commençons par remarquer que :

$$\int_{-\infty}^{0} |tf(t)|\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} 0\mathrm{d}t = 0$$

et donc la convergence est déterminée par la convergence en $+\infty$.
Pour $t \geqslant 0$, on a :

$$tf(t) = \lambda t^2\mathrm{e}^{-at} = \lambda \underbrace{t^2\mathrm{e}^{-\frac{at}{2}}}_{\xrightarrow[t\to+\infty]{} 0} \mathrm{e}^{-\frac{at}{2}} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\mathrm{e}^{-\frac{at}{2}}\right).$$

Comme l'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{at}{2}}\mathrm{d}t$ converge, par domination, $\int_0^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t$ converge absolument.
Donc $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t \text{ converge absolument}}$ et donc $\boxed{X \text{ admet une espérance.}}$

Pour $A \in \mathbb{R}_+$, calculons :

$$\begin{aligned}
\int_0^A tf(t)\mathrm{d}t &= \lambda \int_0^A \underbrace{t^2}_{=u(t)} \underbrace{\mathrm{e}^{-at}}_{=v'(t)} \mathrm{d}t \\
&\underset{\text{IPP}}{=} \lambda \left[\underbrace{t^2}_{=u(t)} \underbrace{\frac{\mathrm{e}^{-at}}{-a}}_{=v(t)} \right]_0^A - \lambda \int_0^A \underbrace{2t}_{=u'(t)} \underbrace{\frac{\mathrm{e}^{-at}}{-a}}_{=v(t)} \mathrm{d}t \\
&= -\frac{A^2\mathrm{e}^{-aA}}{a} + \frac{2\lambda}{a} \int_0^A \underbrace{t}_{=\tilde{u}(t)} \underbrace{\mathrm{e}^{-at}}_{=\tilde{v}'(t)} \mathrm{d}t \\
&\underset{\text{IPP}}{=} -\frac{A^2\mathrm{e}^{-aA}}{a} + \frac{2\lambda}{a} \left[\underbrace{t}_{=\tilde{u}(t)} \underbrace{\frac{\mathrm{e}^{-at}}{-a}}_{=\tilde{v}(t)} \right]_0^A - \frac{2\lambda}{a} \int_0^A \underbrace{1}_{=\tilde{u}'(t)} \underbrace{\frac{\mathrm{e}^{-at}}{-a}}_{=\tilde{v}(t)} \mathrm{d}t \\
&= -\underbrace{\frac{A^2\mathrm{e}^{-aA}}{a}}_{\xrightarrow[A\to+\infty]{}0} - \underbrace{\frac{2\lambda A\mathrm{e}^{-aA}}{a^2}}_{\xrightarrow[A\to+\infty]{}0} + \frac{2\lambda}{a^2} \underbrace{\int_0^A \mathrm{e}^{-at}\mathrm{d}t}_{\xrightarrow[A\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}\mathrm{d}t = \frac{1}{a}} \\
&\xrightarrow[A\to+\infty]{} \frac{2\lambda}{a^3} = \frac{2}{a}.
\end{aligned}$$

Et donc :

$$\boxed{E(X) = \frac{2}{a}.}$$

Exercice 9 ⋆⋆

1. Vérifions que f est une densité :
   - $\boxed{f \text{ est continue sauf éventuellement en } 1.}$
   - $\boxed{f \text{ est bien positive.}}$
   - On a $\int_{-\infty}^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^1 0\mathrm{d}x = 0$.
     De plus pour $A \in [1, +\infty[$, on a :
     $$\int_1^A f(x)\mathrm{d}x = \int_1^A \frac{\alpha - 1}{x^\alpha}\mathrm{d}x = \left[-x^{1-\alpha}\right]_1^A = 1 - A^{1-\alpha} \xrightarrow[A\to+\infty]{} 1.$$
     Donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ converge et :
     $$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1.}$$

   Donc $\boxed{f \text{ est bien une densité de probabilité.}}$
2. Pour $x < 1$, on a clairement :
   $$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^x 0\mathrm{d}t = 0.$$
   Et pour $x \geqslant 1$, on a :
   $$\begin{aligned}
   F_X(x) &= \int_{-\infty}^x f(t)\mathrm{d}t = \underbrace{\int_{-\infty}^1 f(t)\mathrm{d}t}_{=0} + \int_1^x f(t)\mathrm{d}t \\
   &= \int_1^x \frac{\alpha - 1}{t^\alpha}\mathrm{d}t = \left[-t^{1-\alpha}\right]_1^x \\
   &= 1 - x^{1-\alpha}.
   \end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - x^{1-\alpha} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}.}$$

3. On s'intéresse à l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$.
Notons déjà que :

$$\int_{-\infty}^{1} xf(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{1} x \times 0\mathrm{d}x = 0.$$

De plus, pour $A \in [1, +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} \int_{1}^{A} xf(x)\mathrm{d}x &= \int_{1}^{A} x \times \frac{\alpha-1}{x^\alpha}\mathrm{d}x = \int_{1}^{A} (\alpha-1)x^{1-\alpha} \\ &= \left[(\alpha-1)\frac{x^{2-\alpha}}{2-\alpha}\right]_1^A = \frac{\alpha-1}{\alpha-2}\left(1-A^{2-\alpha}\right) \\ &\xrightarrow[A\to+\infty]{} \frac{\alpha-1}{\alpha-2}. \end{aligned}$$

Comme tout est positif, la convergence est absolue. Et donc X admet une espérance et :

$$\boxed{E(X) = \frac{\alpha-1}{\alpha-2}.}$$

Exercice 10 ⋆⋆

Commençons par remarquer que Y est une variable aléatoire réelle car c'est une fonction continue de X.
On note F_Y la fonction de répartition de Y. On a pour $y \in \mathbb{R}$:

$$F_Y(y) = P(Y \leqslant y) = P(\tan X \leqslant y) = P(X \leqslant \arctan y) \text{ (stricte croissance de arctan).}$$

Comme $\arctan(y) \in [-\pi/2, \pi/2]$, on a alors :

$$\boxed{F_Y(y) = \frac{\arctan y}{\pi} + \frac{1}{2}}$$

en remarquant que $X \hookrightarrow \mathcal{U}\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$ et donc que $F_X(x) = \frac{x+\frac{\pi}{2}}{\pi}$ si $x \in [-\pi/2, \pi/2]$.
Comme F_Y est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (et donc également $\mathcal{C}^0$), $\boxed{Y \text{ est bien une variable à densité.}}$
Déterminons maintenant une densité f_Y de Y. On a pour tout $y \in \mathbb{R}$:

$$F'_Y(y) = \frac{1}{\pi(1+y^2)}.$$

Donc une densité de Y est donnée par :

$$f_Y : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ y & \mapsto & \frac{1}{\pi(1+y^2)} \end{cases}.$$

Y admet une espérance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} yf_Y(y)\mathrm{d}y$ converge absolument. Regardons par exemple $\int_0^{+\infty} yf_Y(y)\mathrm{d}y$.
On a $yf_Y(y) = \frac{y}{\pi(1+y^2)} \underset{y\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\pi y}$. Comme les fonctions sont positives et que l'intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{1}{y}\mathrm{d}y$ diverge (intégrale de Riemann), l'intégrale $\int_0^{+\infty} yf_Y(y)\mathrm{d}y$ diverge également par équivalence.
Nécessairement, elle ne converge pas absolument non plus. Et donc $\boxed{Y \text{ ne possède pas d'espérance.}}$

Exercice 11 ⋆⋆⋆

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. I_{n+1} et J_{n+1} sont des intégrales sur des segments. On a donc :

$$\begin{aligned}
I_{n+1} &= \int_0^{2\pi} \underbrace{x^{n+1}}_{=u(x)} \underbrace{\sin(x)}_{=v'(x)} \mathrm{d}x \\
&\underset{\text{IPP}}{=} \left[\underbrace{x^{n+1}}_{=u(x)} \underbrace{(-\cos(x))}_{=v(x)} \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \underbrace{(n+1)x^n}_{=u'(x)} \underbrace{(-\cos(x))}_{=v(x)} \mathrm{d}x \\
&= -(2\pi)^{n+1} + (n+1) \int_0^{2\pi} x^n \cos(x) \mathrm{d}x \boxed{= (n+1)J_n - (2\pi)^{n+1}.}
\end{aligned}$$

Et de même :

$$\begin{aligned}
J_{n+1} &= \int_0^{2\pi} \underbrace{x^{n+1}}_{=u(x)} \underbrace{\cos(x)}_{=v'(x)} \mathrm{d}x \\
&\underset{\text{IPP}}{=} \left[\underbrace{x^{n+1}}_{=u(x)} \underbrace{\sin(x)}_{=v(x)} \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \underbrace{(n+1)x^n}_{=u'(x)} \underbrace{\sin(x)}_{=v(x)} \mathrm{d}x \\
&= -(n+1) \int_0^{2\pi} x^n \sin(x) \mathrm{d}x \boxed{= -(n+1)I_n.}
\end{aligned}$$

(b) On a $I_0 = \int_0^{2\pi} \sin(x)\mathrm{d}x = [-\cos(x)]_0^{2\pi} = 0$ et de même $J_0 = 0$.
On en déduit de proche en proche :

$$\begin{aligned}
I_0 = 0 &\quad \text{et} \quad J_0 = 0, \\
I_1 = -2\pi &\quad \text{et} \quad J_1 = 0, \\
I_2 = -4\pi^2 &\quad \text{et} \quad J_2 = 4\pi, \\
I_3 = 12\pi - 8\pi^3 &\quad \text{et} \quad J_3 = 12\pi^2.
\end{aligned}$$

2. (a) Vérifions que f est une densité :

- f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 et en 2π.
- f est bien positive sur $\mathbb{R}$. En effet $1 - \cos(x) \geqslant 0$ puisque cos est majorée par 1.
- On étudie $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$. Comme $f(x) = 0$ si $x \notin [0, 2\pi]$, c'est en fait une intégrale sur un segment et donc elle converge.
  De plus :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x &= \int_0^{2\pi} \frac{x}{2\pi^2}(1 - \cos x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi^2} \left(\int_0^{2\pi} x\mathrm{d}x - J_1 \right) \\
&= \frac{1}{2\pi^2} \left(\left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{2\pi} - 0 \right) \\
&= \frac{1}{2\pi^2} \times \frac{(2\pi)^2}{2} \boxed{= 1.}
\end{aligned}$$

Donc f est bien une densité de probabilité.

(b) Notons F la fonction de répartition de X. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t.$$

Pour $x<0$, on a : $F(x)=0$. Pour $x>2\pi$, on a clairement $F(x)=1$. Et pour $x\in[0,2\pi]$, on a :

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{t}{2\pi^2}(1-\cos(t))\mathrm{d}t\\
&= \int_0^x \frac{t}{2\pi^2}\mathrm{d}t - \frac{1}{2\pi^2}\int_0^x \underbrace{t}_{=u(t)}\underbrace{\cos(t)}_{=v'(t)}\mathrm{d}x\\
&\underset{\text{IPP}}{=} \left[\frac{t^2}{4\pi^2}\right]_0^x - \frac{1}{2\pi^2}\left(\left[\underbrace{t}_{=u(t)}\underbrace{\sin(t)}_{=v(t)}\right]_0^x - \int_0^x \underbrace{1}_{=u'(t)}\times\underbrace{\sin(t)}_{=v(t)}\mathrm{d}t\right)\\
&= \frac{x^2}{4\pi^2} - \frac{1}{2\pi^2}\left(x\sin(x) - [-\cos(t)]_0^x\right)\\
&= \frac{x^2}{4\pi^2} - \frac{1}{2\pi^2}\left(x\sin(x)+\cos(x)-1\right).
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{F(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ \frac{x^2}{4\pi^2}-\frac{1}{2\pi^2}\left(x\sin(x)+\cos(x)-1\right) & \text{si } x\in[0,2\pi]\\ 1 & \text{si } x>1\end{cases}.}$$

(c) $E(X)$ existe si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$ converge absolument. Or, comme $f(x)=0$ si $x\notin[0,2\pi]$, c'est une intégrale sur un segment et c'est donc une intégrale convergente et même absolument. On a donc :

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi}\frac{x^2}{2\pi^2}(1-\cos(x))\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2\pi^2}\left(\int_0^{2\pi} x^2\mathrm{d}x - \int_0^{2\pi} x^2\cos(x)\mathrm{d}x\right)\\
&= \frac{1}{2\pi^2}\left(\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{2\pi} - J_2\right) = \frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{(2\pi)^3}{3}-4\pi\right)\boxed{=\frac{4\pi}{3}-\frac{2}{\pi}.}
\end{aligned}$$

(d) Calculons chaque probabilité :

- On a :

$$\begin{aligned}
P\left(X>\frac{\pi}{2}\right) &= 1-P\left(X\leqslant\frac{\pi}{2}\right) = 1-F\left(\frac{\pi}{2}\right)\\
&= 1-\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{4\pi^2}+\frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{\pi}{2}\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{=1}+\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{=0}-1\right)\\
&= \boxed{\frac{15}{16}+\frac{1}{4\pi}-\frac{1}{2\pi^2}.}
\end{aligned}$$

- On a :

$$\begin{aligned}
& P\left(|X-\pi|\leqslant\frac{\pi}{2}\right)\\
=\ & P\left(\frac{\pi}{2}\leqslant X\leqslant\frac{3\pi}{2}\right) = P\left(X\leqslant\frac{3\pi}{2}\right) - P\left(X<\frac{\pi}{2}\right)\\
\underset{X \text{ à densité}}{=}\ & P\left(X\leqslant\frac{3\pi}{2}\right) - P\left(X\leqslant\frac{\pi}{2}\right) = F\left(\frac{3\pi}{2}\right) - F\left(\frac{\pi}{2}\right)\\
=\ & \frac{\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2}{4\pi^2} - \frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{3\pi}{2}\underbrace{\sin\frac{3\pi}{2}}_{=-1}+\underbrace{\cos\frac{3\pi}{2}}_{=0}-1\right) - \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{4\pi^2} + \frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{\pi}{2}\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{=1}+\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{=0}-1\right)\\
=\ & \boxed{\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}.}
\end{aligned}$$

- On a :

$$\begin{aligned}
P_{[X\leq \frac{3\pi}{2}]}\left(X \geq \frac{\pi}{2}\right) &= \frac{P\left(\left[X \leq \frac{3\pi}{2}\right] \cap \left[X \geq \frac{\pi}{2}\right]\right)}{P\left(X \leq \frac{3\pi}{2}\right)} = \frac{P\left(|X-\pi| \leqslant \frac{\pi}{2}\right)}{P\left(X \leq \frac{3\pi}{2}\right)} \\
&= \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}}{\frac{\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2}{4\pi^2} - \frac{1}{2\pi^2}\left(-\frac{3\pi}{2}-1\right)} = \frac{16\pi^2(\pi+2)}{2\pi\left(9\pi^2+4\times(3\pi+2)\right)} \\
&= \boxed{\frac{8\pi(\pi+2)}{9\pi^2+12\pi+8}.}
\end{aligned}$$

Exercice 12 ⋆⋆⋆

1. (a) Z possède une espérance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} xg(x)\mathrm{d}x$ converge absolument.

   Or, comme Z est à valeurs dans $]0,1[$, on a nécessairement $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ si $a<b\leqslant 0$ ou $1\leqslant a<b$. Comme g est positive et continue, cela implique que g est nulle sur $]-\infty,0]$ et $[1,+\infty[$.
   Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} xg(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 xg(x)\mathrm{d}x$ qui est converge car c'est une intégrale sur un segment.
   Donc $\boxed{Z \text{ admet une espérance.}}$

   (b) On a :

$$\begin{aligned}
E(Z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xg(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 xg(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_1^0 (1-t)g(1-t)(-1)\mathrm{d}t \text{ (changement affine } x=1-t) \\
&= \int_0^1 (1-t)\underbrace{g(1-t)}_{=g(t)}\mathrm{d}t = \underbrace{\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t}_{=1} - \underbrace{\int_0^1 tg(t)\mathrm{d}t}_{=E(Z)} \\
&= 1-E(Z).
\end{aligned}$$

   On résout et on trouve :

$$\boxed{E(Z) = \frac{1}{2}.}$$

2. (a) sin est continue et strictement croissante sur $\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Comme $\sin(-\pi/2)=-1$ et $\sin(\pi/2)=1$, d'après le théorème de la bijection, sin est une bijection de $\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ dans $[-1,1]$.

   (b) sin est dérivable sur $\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Donc φ est dérivable en $y\in[-1,1]$ si et seulement si $\sin'(\varphi(y))\neq 0$.
   Or $\sin' = \cos$ et $\cos(x)=0 \Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{2}$ (pour $x\in\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$).
   $\boxed{\text{Donc } \varphi \text{ est dérivable partout sauf pour } \varphi(y)=\pm\frac{\pi}{2}, \text{ c'est-à-dire pour } y=\pm 1.}$ De plus pour $y\in]-1,1[$, on a :

$$\varphi'(y) = \frac{1}{\cos(\varphi(y))} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\varphi(y))}}$$

   car cos est positif sur $\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Puis :

$$\boxed{\varphi'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.}$$

   (c) Prouvons les deux d'un coup. Posons $\psi : t\mapsto \frac{1+t}{2}$. ψ est bien $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone. Comme $\psi(-1)=0$ et $\psi(1)=1$, les intégrales :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}} \quad \text{et} \quad \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{\frac{1+t}{2}(1-\frac{1+t}{2})}}\frac{\mathrm{d}t}{2}$$

   ont même nature et sont égales en cas de convergence.

Or sous réserve de convergence :

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{\frac{1+t}{2}(1-\frac{1+t}{2})}}\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t.$$

L'intégrande est paire, il suffit donc d'étudier $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$.
Pour $A \in [0,1[$, on a :

$$\int_0^A \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t = [\varphi(t)]_0^A = \underbrace{\varphi(A)}_{\xrightarrow[A\to 1]{} \frac{\pi}{2}} - \underbrace{\varphi(0)}_{=0} \xrightarrow[A\to 1]{} \frac{\pi}{2}.$$

Donc l'intégrale converge et, par parité :

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t = \int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t + \int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Et enfin :

$$\boxed{\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}} = \pi.}$$

3. (a) On vérifie que f est une densité :
   - f est continue sauf en 0 et en 1.
   - f est positive.
   - $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge car c'est une intégrale sur un segment et on a :

   $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{\pi\sqrt{t(1-t)}}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{\pi} = 1.$$

   Donc f est bien une densité de probabilité.

   (b) On a $f(t) = 0$ si $t \notin]0,1[$. De plus, pour tout $t \in]0,1[$, $f(1-t) = f(t)$. Donc :

   $$\boxed{E(X) = \frac{1}{2}.}$$

   (c) On reprend. On a (sous réserve de convergence) :

   $$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x}{\pi\sqrt{x(1-x)}}\mathrm{d}x.$$

   On pose $\psi : \theta \mapsto (\sin(\theta))^2$. Pour $\theta \in [0,\pi/2]$, ψ est $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone. De plus $\psi(0) = 0$ et $\psi(\pi/2) = 1$. Donc les intégrales suivantes :

   $$\int_0^1 \frac{x}{\pi\sqrt{x(1-x)}}\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin(\theta))^2}{\pi\sqrt{(\sin(\theta))^2(1-(\sin(\theta))^2)}} 2\cos(\theta)\sin(\theta)\mathrm{d}\theta.$$

   ont même nature et en cas de convergence, sont égales.
   Or, sous réserve de convergence, on a :

   $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin(\theta))^2}{\pi\sqrt{(\sin(\theta))^2(1-(\sin(\theta))^2)}} 2\cos(\theta)\sin(\theta)\mathrm{d}\theta = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin(\theta))^2}{\sin(\theta)\sqrt{(\cos(\theta))^2}}\cos(\theta)\sin(\theta)\mathrm{d}\theta = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(\theta))^2\mathrm{d}$$

   car sin et cos sont positives sur $[0,\pi/2]$.
   Comme on obtient une intégrale sur un segment, c'est clairement convergent. De plus, on a :

   $$(\sin(\theta))^2 = \frac{1-\cos(2\theta)}{2}$$

   et donc :

   $$\boxed{E(X) = \int_0^1 \frac{x}{\pi\sqrt{x(1-x)}}\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin(2\theta)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} \times \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}.}$$

3 Lois usuelles

Exercice 13 ⋆

1. On note F_X la fonction de répartition de X. On a pour $x \in \mathbb{R}$:
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}.$$
Ainsi si $F_X(x) = \frac{1}{2}$, nécessairement $x \geqslant 0$. On résout donc :
$$1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-\lambda x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\lambda x = \ln \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\ln 2}{\lambda}.$$
Ainsi $\boxed{\text{la médiane de } X \text{ est } \frac{\ln 2}{\lambda}.}$
2. (a) On cherche à calculer $P(X > 10)$ (ou $P(X \geqslant 10)$ c'est identique) avec $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1/10)$.
On a :
$$\boxed{P(X > 10) = 1 - P(X \leqslant 10) = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{10}{10}} = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}}.}$$
(b) La question est mal posée : la probabilité d'attendre exactement 25 minutes est forcément 0 car on a une variable à densité. Reformulons : quelle est la probabilité d'attendre au moins 25 minutes ?
On a :
$$\boxed{P_[X > 15](X > 25) = P(X > 10) = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}}.}$$
Nous avons utilisé la propriété de la loi exponentielle qui est dite sans mémoire.

Exercice 14 ⋆

On ne montre pas que $\lfloor X \rfloor$ est une variable aléatoire. En effet, comme $x \mapsto \lfloor \cdot \rfloor$ n'est pas continue, les théorèmes habituels ne s'appliquent pas. Cela pourrait être un exercice, mais certainement pas un exercice à une étoile.
Admettons donc que $Y = \lfloor X \rfloor$ est une variable aléatoire réelle. Puisque $Y(\Omega) \subset \mathbb{N}$, Y est même une variable discrète.
Soit $k \in \mathbb{N}$. On a :
$$\begin{aligned} P(Y = k) &= P(\lfloor X \rfloor = k) = P(k \leqslant X < k+1) \\ &= P(X < k+1) - P(X < k) = P(X \leqslant k+1) - P(X \leqslant k) \text{ (car } X \text{ est à densité).} \end{aligned}$$
Si $k+1 \leqslant n$, alors : $P(Y = k) = \frac{k+1}{n} - \frac{k}{n} = \frac{1}{n}$. Si $k+1 > n$, alors $k \leqslant n$ et $P(Y = k) = 1 - 1 = 0$.
Sans surprise, on a $\boxed{Y \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 0, n-1 \rrbracket).}$

Exercice 15 ⋆

Comme dans l'exercice précédent, on admet que Y est une variable aléatoire réelle. Encore une fois, Puisque $Y(\Omega) \subset \mathbb{N}$, Y est même une variable discrète.
Soit $k \in \mathbb{N}$. On a :
$$\begin{aligned} P(Y = k) &= P(\lfloor X \rfloor = k) = P(k \leqslant X < k+1) \\ &= P(X < k+1) - P(X < k) = P(X \leqslant k+1) - P(X \leqslant k) \text{ (car } X \text{ est à densité)} \\ &= (1 - \mathrm{e}^{-\lambda(k+1)}) - (1 - \mathrm{e}^{-\lambda k}) = \mathrm{e}^{-\lambda k}(1 - \mathrm{e}^{-\lambda}) \\ &= \boxed{(\mathrm{e}^{-\lambda})^k (1 - \mathrm{e}^{-\lambda}).} \end{aligned}$$
Donc $\boxed{Y \hookrightarrow \mathcal{G}(1 - \mathrm{e}^{-\lambda}).}$

Exercice 16 ⋆⋆

1. On a pour $A > 0$:

$$\begin{aligned} I(A) &= \int_0^A t^2 \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t = \int_0^A \underbrace{t}_{=u(t)} \times \underbrace{t\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}}_{=v'(t)} \mathrm{d}t \\ &\underset{\text{IPP}}{=} \left[\underbrace{t}_{=u(t)} \times \underbrace{-\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}}_{=v(t)} \right]_0^A - \int_0^A \underbrace{1}_{=u'(t)} \times \underbrace{-\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}}_{=v(t)} \mathrm{d}t \\ &= -A\mathrm{e}^{\frac{-A^2}{2}} + \int_0^A \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t \\ &= -A\mathrm{e}^{\frac{-A^2}{2}} + \int_{-\infty}^A \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t - \int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t \end{aligned}$$

   Or $\Phi(A) = \int_{-\infty}^A \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t$. Donc :

$$\boxed{I(A) = -A\mathrm{e}^{\frac{-A^2}{2}} + \sqrt{2\pi}(\Phi(A) - \underbrace{\Phi(0)}_{=\frac{1}{2}}).}$$

2. Par croissance comparée, on a $-A\mathrm{e}^{\frac{-A^2}{2}} \xrightarrow[A \to +\infty]{} 0$. Donc :

$$\boxed{\lim_{A \to +\infty} I(A) = \lim_{A \to +\infty} \sqrt{2\pi} \left(\underbrace{\Phi(A)}_{\to 1} - \frac{1}{2} \right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.}$$

3. Or T admet une espérance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_T(t) \mathrm{d}t$ converge absolument. Comme tout est positif, cela revient à la convergence usuelle.
   De plus, $\int_{-\infty}^0 t f_T(t) \mathrm{d}t = 0$ et $\int_0^{+\infty} t f_T(t) \mathrm{d}t = \lim_{A \to +\infty} I(A) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.
   D'où :

$$\boxed{E(T) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.}$$

Exercice 17 ⋆⋆

Y admet une variance si et seulement si Y^2 admet une espérance.
D'après le théorème de transfert, c'est le cas si et seulement si :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2} f_X(x) \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} \frac{x^{\nu-1} \mathrm{e}^{-x}}{\Gamma(\nu)} \mathrm{d}x$$

converge absolument. Comme tout est positif, cela revient à la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{x^{\nu-3}\mathrm{e}^{-x}}{\Gamma(\nu)} \mathrm{d}x$. Comme c'est l'intégrale de définition de Γ, le résultat est bien connu : l'intégrale converge si et seulement si $\nu - 3 > -1$ c'est-à-dire si et seulement si $\nu > 2$.
Dans ce cas, on a :

$$E(Y^2) = \frac{\Gamma(\nu-2)}{\Gamma(\nu)} = \frac{\Gamma(\nu-2)}{(\nu-1)(\nu-2)\Gamma(\nu-2)} = \frac{1}{(\nu-1)(\nu-2)}.$$

On calculerait de même :

$$E(Y) = \frac{\Gamma(\nu-1)}{\Gamma(\nu)} = \frac{\Gamma(\nu-1)}{(\nu-1)\Gamma(\nu-1)} = \frac{1}{\nu-1}.$$

Donc d'après la formule de Huygens :

$$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = \frac{1}{(\nu-1)(\nu-2)} - \frac{1}{(\nu-1)^2} = \frac{\nu - 1 - \nu + 2}{(\nu-1)^2(\nu-2)}.$$

D'où finalement :

$$\boxed{V(Y) = \frac{1}{(\nu-1)^2(\nu-2)}.}$$

Exercice 18 ⋆⋆

X admet un moment d'ordre r si et seulement si X^r admet une espérance. Et d'après le théorème de transfert, c'est le cas si et seulement si :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^r f_X(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x^r \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x$$

converge absolument, c'est-à-dire converge puisque tout est positif.
Or $x^r\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x} = \underbrace{x^r\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x/2}}_{\to 0}\mathrm{e}^{-\lambda x/2} = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\mathrm{e}^{-\lambda x/2}\right)$. Comme $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\lambda x/2}\mathrm{d}x$ est convergente, par domination, $\int_0^{+\infty} x^r\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x$ converge absolument.
De plus, pour $r\in\mathbb{N}^\star$, et $A\in\mathbb{R}_+^\star$, on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^A \underbrace{x^r}_{=u(x)}\underbrace{\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}}_{=v'(x)}\mathrm{d}x &\underset{\text{IPP}}{=} \left[\underbrace{x^r}_{=u(x)}\underbrace{\left(-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right)}_{=v(x)}\right]_0^A - \int_0^A \underbrace{rx^{r-1}}_{=u'(x)}\underbrace{\left(-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right)}_{=v(x)}\mathrm{d}x \\
&= -A^r\mathrm{e}^{-\lambda A} + \frac{r}{\lambda}\int_0^A x^{r-1}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Donc en passant à la limite $A\to+\infty$, on obtient :

$$E(X^r) = \frac{r}{\lambda}E(X^{r-1}).$$

Comme de plus $E(X^0)=1$, on a par récurrence immédiate :

$$\boxed{E(X^r) = \frac{r!}{\lambda^r}.}$$

Exercice 19 ⋆⋆

1. L'idée est de reconnaître l'intégrale d'une densité de loi normale. Il faut donc se rapprocher de la forme :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Pour commencer, on a pour $t\in\mathbb{R}$:

$$-\frac{1}{8}(t^2+2t+1) = -\frac{1}{8}(t+1)^2$$

Donc en posant $\mu=-1$ et $\sigma=2$, c'est de la forme $-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}$.
Puis :

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{1}{8}(t^2+2t+1)}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{1}{8}(t+1)^2}\mathrm{d}t \\
&= \sqrt{2\pi}\times 2\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\times 2}\mathrm{e}^{-\frac{(t+1)^2}{2\times 2^2}}\mathrm{d}t}_{=1}\boxed{=2\sqrt{2\pi}.}
\end{aligned}$$

2. On procède de même mais pour reconnaître l'espérance d'une loi normale.
On a :

$$\begin{aligned}
J &= \int_{-\infty}^{+\infty} t\mathrm{e}^{-\frac{1}{8}(t^2+2t+1)}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} t\mathrm{e}^{-\frac{1}{8}(t+1)^2}\mathrm{d}t \\
&= \sqrt{2\pi}\times 2\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\times 2}t\mathrm{e}^{-\frac{(t+1)^2}{2\times 2^2}}\mathrm{d}t}_{=-1}\boxed{=-2\sqrt{2\pi}.}
\end{aligned}$$

3. On a :

$$\begin{aligned} K &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t^2+12t-16}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-2((t-3)^2-1)}\mathrm{d}t \\ &= \mathrm{e}^2 \times \sqrt{2\pi} \times \frac{1}{2} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \times \frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{(t-3)^2}{2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2}} \mathrm{d}t}_{=1} \boxed{= \mathrm{e}^2 \sqrt{\frac{\pi}{2}}.} \end{aligned}$$

4. On a :

$$\begin{aligned} L &= \int_{-\infty}^{+\infty} t^2\mathrm{e}^{-2t^2+12t-16}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2\mathrm{e}^{-2((t-3)^2-1)}\mathrm{d}t \\ &= \mathrm{e}^2 \times \sqrt{2\pi} \times \frac{1}{2} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi} \times \frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{(t-3)^2}{2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2}} \mathrm{d}t}_{=\frac{1}{2^2}+3^2=\frac{37}{4}} \boxed{= \frac{37}{4}\mathrm{e}^2 \sqrt{\frac{\pi}{2}}.} \end{aligned}$$

Exercice 20 ★★

1. On note F_Y la fonction de répartition de Y. On a pour $y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leqslant y) = P(F_Z(Z) \leqslant y) \\ &= P(1 - \mathrm{e}^{-\lambda Z} \leqslant y) = P(\mathrm{e}^{-\lambda Z} \geqslant 1 - y). \end{aligned}$$

Si $1 - y \leqslant 0$, alors comme exp est strictement positive, $P(\mathrm{e}^{-\lambda Z} \geqslant 1-y) = 1$. Si en revance $1 - y > 0$, alors :

$$P(\mathrm{e}^{-\lambda Z} \geqslant 1 - y) = P(-\lambda Z \geqslant \ln(1-y)) = P(Z \leqslant -\frac{\ln(1-y)}{\lambda}) = F_Z(-\frac{\ln(1-y)}{\lambda}).$$

On distingue deux cas :
- Si $-\frac{\ln(1-y)}{\lambda} < 0$, c'est-à-dire si $y < 0$. Dans ce cas, $F_Z(-\frac{\ln(1-y)}{\lambda}) = 0$.
- Si $-\frac{\ln(1-y)}{\lambda} \geqslant 0$, c'est-à-dire si $y \geqslant 0$ (toujours sous condition que $1-y \leqslant 0$). Dans ce cas, $F_Z(-\frac{\ln(1-y)}{\lambda}) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda\left(-\frac{\ln(1-y)}{\lambda}\right)} = 1 - (1-y) = y$.

En mettant tout bout à bout, on obtient :

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ y & \text{si } y \in [0,1] \\ 1 & \text{si } y > 1 \end{cases}$$

Ainsi $\boxed{Y \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1]).}$

2. Tout fonctionne exactement pareil que dans le cas précédent. Soulignons juste les points importants.
On note F_Y la fonction de répartition de Y. Pour $y \in \mathbb{R}$. On a :

$$F_Y(y) = P(Y \leqslant y) = P(F_X(X) \leqslant y).$$

Encore une fois, si $y > 1$, on a $P(F_X(X) \leqslant y) = 1$ puisque F_X est à valeur dans $[0,1]$. Si $y < 0$, on a $P(F_X(X) \leqslant y) = 0$ pour la même raison.
F_X est une bijection croissante de $\mathbb{R}$ dans $[0,1]$ d'après le théorème de la bijection. Et donc pour $y \in [0,1]$, on a :

$$P(F_X(X) \leqslant y) = P(X \leqslant F_X^{-1}(y)).$$

Puis :

$$F_Y(y) = F_X(F_X^{-1}(y)) = y.$$

Et donc $\boxed{Y \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1]).}$

Exercice 21 - Lois sans mémoire ⋆⋆⋆

1. C'est du cours. Vérifions-le rapidement. On a pour $t, s \in \mathbb{R}_+$:
$$P(X > t+s) = 1 - P(X \leqslant t+s) = 1 - (1 - \mathrm{e}^{-\lambda(t+s)}) = \mathrm{e}^{-\lambda(t+s)}.$$
Et également :
$$P(X > t)P(X > s) = (1-P(X \leqslant t))(1-P(X \leqslant s)) = (1-(1-\mathrm{e}^{-\lambda t}))(1-(1-\mathrm{e}^{-\lambda s})) = \mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{e}^{-\lambda s} = \mathrm{e}^{-\lambda(t+s)}.$$
Donc, on a bien :
$$\boxed{P(X > t+s) = P(X > t)P(X > s).}$$

2. Montrons-le par contraposée. On suppose qu'il existe $t \in \mathbb{R}_+^\star$ tel que $P(Y > t) = 0$. Montrons que l'on a alors nécessairement $P(Y > 0) = 0$.
Comme Y est sans mémoire, on a :
$$P(Y > t) = P(Y > \frac{t}{2})P(Y > \frac{t}{2}).$$
Comme $P(Y > t) = 0$, on a nécessairement $P(Y > \frac{t}{2}) = 0$. Par une récurrence immédiate, on a alors :
$$P(Y > \frac{t}{2^n}) = 0$$
pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or $y \mapsto P(Y > y)$ est continue (car Y est à densité). Donc $P(Y > 0) = \lim_{n\to+\infty} P(Y > \frac{t}{2^n}) = 0$.
Par contraposée, on a bien que si $P(Y > 0) > 0$ alors $\boxed{P(Y > t) > 0 \text{ pour tout } t > 0.}$

3. (a) Faisons-le par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
   - **Initialisation :** On a bien $f(1) = 1 \times f(1)$.
   - **Hérédite :** Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $f(n) = nf(1)$. Montrons que $f(n+1) = (n+1)f(1)$.
   On a :
$$\begin{aligned} f(n+1) &= \ln(P(Y > n+1)) = \ln(P(Y > n)P(Y > 1)) \\ &= \ln(P(Y > n)) + \ln(P(Y > 1)) = f(n) + f(1) \\ &= nf(1) + f(1) \boxed{= (n+1)f(1).} \end{aligned}$$
   Et donc par récurrence sur n, on a bien $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N} : f(n) = nf(1).}$

   (b) Soit $q \in \mathbb{Q}_+$. On peut écrire $q = \frac{n}{m}$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}^\star$. De la même manière que dans la question précédente, on montre que :
$$f\left(\frac{m}{n}\right) = mf\left(\frac{1}{n}\right)$$
   En particulier, on a :
$$f(1) = f\left(\frac{n}{n}\right) = nf\left(\frac{1}{n}\right)$$
   et donc $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{f(1)}{n}$ et ainsi :
$$\boxed{f(q) = f\left(\frac{m}{n}\right) = mf\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{m}{n}f(1) = qf(1).}$$

   (c) f est continue par composition de fonctions continues (car Y est à densité). Donc :
$$\boxed{f(x) = \lim_{n\to+\infty} f(q_n) = \lim_{n\to+\infty} q_n f(1) = xf(1).}$$

4. Pour $t > 0$, on a :
$$P(Y > t) = \exp(f(t)) = \exp(tf(1)).$$
Donc :
$$F_Y(t) = P(Y \leqslant t) = 1 - \exp(tf(1)).$$
Par continuité, on a nécessairement $F_Y(0) = 0$. Et par croissance, on a aussi $F_Y(t) = 0$ si $t < 0$.
D'où pour $t \in \mathbb{R}$:
$$F_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant 0 \\ 1 - \exp(tf(1)) & \text{si } t > 0 \end{cases}.$$
Donc $\boxed{Y \hookrightarrow \mathcal{E}(f(1)).}$

Exercice 22 ⋆⋆⋆

1. Vérifions que f est une densité :
   - $\boxed{f \text{ est continue}}$ sauf éventuellement en 0.
   - $\boxed{f \text{ est bien positive.}}$
   - On a :
   $$\int_{-\infty}^{0} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} p\mu \mathrm{e}^{\mu x}\mathrm{d}x = p\mu\frac{1}{\mu} = p$$
   et :
   $$\int_{0}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{+\infty} q\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x = q\lambda\frac{1}{\lambda} = q.$$
   Donc l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ converge et :
   $$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = p + q = 1.}$$

   Donc $\boxed{f \text{ est bien une densité de probabilité.}}$
2. X admet une espérance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$.
   Or pour $x > 0$:
   $$xf(x) = q\lambda x\mathrm{e}^{-\lambda x} = \underbrace{q\lambda x\mathrm{e}^{-\lambda x/2}}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{}0}\mathrm{e}^{-\lambda x/2} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\mathrm{e}^{-\lambda x/2}\right).$$
   Donc $\int_0^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$ converge absolument par négligeabilité.
   De même, on a $xf(x) \underset{x\to-\infty}{=} o\left(\mathrm{e}^{\mu x/2}\right)$ et donc $\int_{-\infty}^{0} xf(x)\mathrm{d}x$ converge absolument.
   De plus, pour $A \in \mathbb{R}_+^\star$, on a :
   $$\begin{aligned}
   \int_0^A xf(x)\mathrm{d}x &= q\int_0^A \underbrace{x}_{=u(x)} \times \underbrace{\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}}_{=v'(x)}\mathrm{d}x \\
   &\underset{\text{IPP}}{=} q\left(\left[\underbrace{x}_{=u(x)} \times \underbrace{(-\mathrm{e}^{-\lambda x})}_{=v(x)}\right]_0^A - \int_0^A \underbrace{1}_{=u'(x)} \times \underbrace{(-\mathrm{e}^{-\lambda x})}_{=v(x)}\mathrm{d}x\right) \\
   &= q\left(\underbrace{-A\mathrm{e}^{-\lambda A}}_{\xrightarrow[A\to+\infty]{}0} + \underbrace{\int_0^A \mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x}_{\xrightarrow[A\to+\infty]{}\frac{1}{\lambda}}\right).
   \end{aligned}$$
   Donc :
   $$\int_0^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x = \frac{q}{\lambda}.$$

De même :

$$\int_{-\infty}^{0} xf(x)\mathrm{d}x = \frac{p}{\mu}.$$

Et ainsi :

$$\boxed{E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x = \frac{q}{\lambda} + \frac{p}{\mu}.}$$

3. (a) Commençons par calculer $P(X < -x)$ pour $x \geqslant 0$. On a :

$$P(X < -x) = P(X \leqslant -x) = \int_{-\infty}^{-x} p\mu \mathrm{e}^{\mu t}\mathrm{d}t.$$

Pour $A < -x$, on a :

$$\int_{A}^{-x} p\mu \mathrm{e}^{\mu t}\mathrm{d}t = \left[p\mathrm{e}^{\mu t}\right]_A^{-x} = p(\mathrm{e}^{-\mu x} - \mathrm{e}^{\mu A})$$

et donc :

$$\boxed{P(X < -x) = p\mathrm{e}^{-\mu x}.}$$

Calculons de même $P(X > x)$ pour $x \geqslant 0$. On a :

$$\begin{aligned} P(X > x) &= 1 - P(X \leqslant x) = 1 - \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t = 1 - p - \int_0^x q\lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}t = 1 - p - \left[-q\mathrm{e}^{-\lambda t}\right]_0^x \\ &= 1 - p - q + q\mathrm{e}^{-\lambda x} \boxed{= q\mathrm{e}^{-\lambda x}}. \end{aligned}$$

Ainsi, on a l'équivalence :

$$\forall x \geqslant 0,\ P(X > x) = P(X < -x) \Leftrightarrow \forall x \geqslant 0,\ p\mathrm{e}^{-\mu x} = q\mathrm{e}^{-\lambda x}.$$

Dans le cas particulier $x = 0$, on obtient $p = q$ et donc $p = \frac{1}{2}$, puis en étudiant par exemple le cas $x = 1$, on trouve $\lambda = \mu$.

Il est facile de vérifier que la réciproque est vraie.

Ainsi X vérifie la propriété si et seulement si $\boxed{p = \frac{1}{2} \text{ et } \lambda = \mu.}$

(b) Y est bien une variable aléatoire réelle puisque $x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$. On note F_Y sa fonction de répartition.

On a pour $y \in \mathbb{R}$:

$$F_Y(y) = P(Y \leqslant y) = P(|X| \leqslant y).$$

Clairement, si $y < 0$, on a $F_Y(y) = 0$. Si maintenant $y = 0$, on a : $F_Y(0) = P(|X| \leqslant 0) = P(X = 0) = 0$ car X est à densité.

Puis si $y > 0$:

$$\begin{aligned} P(|X| \leqslant y) &= P(-y \leqslant X \leqslant y) = \int_{-y}^{y} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-y}^{0} p\mu\mathrm{e}^{\mu x}\mathrm{d}x + \int_0^y q\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x \\ &= p\left[\mathrm{e}^{\mu x}\right]_{-y}^{0} + q\left[-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^y = p(1 - \mathrm{e}^{-\mu y}) + q(1 - \mathrm{e}^{-\lambda y}) \\ &= (p+q) - p\mathrm{e}^{-\mu y} - q\mathrm{e}^{-\lambda y} \boxed{= 1 - p\mathrm{e}^{-\mu y} - q\mathrm{e}^{-\lambda y}.} \end{aligned}$$

On constate que Y est bien à densité. En revanche, il n'y a pas de loi à reconnaître sauf si on se place dans le cadre de la question précédente ($p = 1/2$ et $\lambda = \mu$). Dans ce cas :

$$F_Y(y) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda y}$$

et donc $\boxed{Y \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda).}$

(c) C'est clairement faux. Faire le test avec $t = 0$ et $s = -1$.

4. On a déjà calculer à plusieurs moments la fonction de répartition de X. On a :

$$\boxed{F_X(x) = \begin{cases} p\mathrm{e}^{\mu x} & \text{si } x \leqslant 0 \\ p + q(1-\mathrm{e}^{-\lambda x}) & \text{si } x > 0 \end{cases}.}$$

Pour résoudre $F_X(x) = y$, il faut distinguer deux cas : $y \leqslant p$ ou $y > p$. Si $y \leqslant p$ alors :

$$x = \frac{1}{\mu} \ln \frac{y}{p}$$

et si $y > p$ alors :

$$x = -\frac{1}{\lambda} \ln\left(1 - \frac{y-p}{q}\right) = -\frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{1-y}{q}\right).$$

D'où :

$$\boxed{F^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{1}{\mu} \ln \frac{y}{p} & \text{si } y \in]0,p] \\ -\frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{1-y}{q}\right) & \text{si } y \in]p,1[\end{cases}.}$$

Exercice 23 ⋆⋆⋆

On a pour $a \in \mathbb{R}_+$:

$$P(a \leqslant X < na) = \int_a^{na} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x$$

Posons donc $f : a \mapsto \int_a^{na} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x$. En notant Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, on a :

$$f(a) = \Phi(na) - \Phi(a).$$

f est donc dérivable par opérations élémentaires. On a pour $a \in \mathbb{R}_+$:

$$f'(a) = n\Phi'(na) - \Phi'(a) = n\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(na)^2}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{a^2}{2}}.$$

Commençons par résoudre :

$$\begin{aligned} f'(a) \geqslant 0 \quad &\Leftrightarrow \quad n\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(na)^2}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{a^2}{2}} \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow \quad n\mathrm{e}^{-\frac{(na)^2}{2}} \geqslant \mathrm{e}^{-\frac{a^2}{2}} \\ &\Leftrightarrow \quad n \geqslant \mathrm{e}^{\frac{(na)^2 - a^2}{2}} \\ &\Leftrightarrow \quad 2\ln(n) \geqslant (na)^2 - a^2 \\ &\Leftrightarrow \quad 2\ln(n) \geqslant (n^2-1)a^2 \\ &\Leftrightarrow \quad a^2 \leqslant \frac{2\ln(n)}{n^2-1} \ (\text{si } n \neq 1) \end{aligned}$$

Remarquons pour $n = 1$, f est constante et égale à 0. On suppose donc $n \neq 1$ dans la suite.
On a donc $n \geqslant 2$. Ainsi :

$$f'(a) \geqslant 0 \Leftrightarrow a \leqslant \sqrt{\frac{2\ln(n)}{n^2-1}}.$$

On en déduit que f est croissante sur $[0, \sqrt{\frac{2\ln(n)}{n^2-1}}]$ puis décroissante sur $[\sqrt{\frac{2\ln(n)}{n^2-1}}, +\infty[$.

Donc $\boxed{f \text{ atteint un maximum en } \sqrt{\frac{2\ln(n)}{n^2-1}}.}$

Exercice 24 ⋆⋆⋆

Commençons par remarquer que pour $t \in \mathbb{R}_+$:

$$1-\Phi(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{d}x-\int_{-\infty}^{t}\frac{\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{d}x=\int_{t}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{d}x.$$

Remarquons maintenant que, d'après le théorème fondamentale de l'analyse, la fonction $t \mapsto 1-\Phi(t)$ est dérivable et que sa dérivée est $t \mapsto -\frac{\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$.
Donc, pour $A \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^A (1-\Phi(t))\mathrm{d}t &= \int_0^A \underbrace{1}_{=u'(t)}\times\underbrace{(1-\Phi(t))}_{=v(t)}\mathrm{d}t\\
&\underset{\text{IPP}}{=} \left[\underbrace{t}_{=u(t)}\times\underbrace{(1-\Phi(t))}_{=v(t)}\right]_0^A-\int_0^A\underbrace{t}_{=u(t)}\times\underbrace{\frac{-\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}}_{=v'(t)}\mathrm{d}t\\
&= A(1-\Phi(A))+\int_0^A\frac{t\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{d}t\\
&= A(1-\Phi(A))+\left[-\frac{\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\right]_0^A\\
&= A(1-\Phi(A))+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{A^2}{2}}\right).
\end{aligned}$$

Le terme le plus difficile à traiter est le premier. Il faut alors remarquer que $1-\Phi(A)$ est le reste de l'intégrale convergente $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{d}t$. On peut essayer d'adapter un résultat sur les séries pour discuter de sa comportement asymptotique.
Montrons que $A(1-\Phi(A))$ tend vers 0. Soit $\epsilon>0$. Montrons qu'il existe $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que pour tout $A\geqslant\alpha$, $|A(1-\Phi(A))|\leqslant\epsilon$.
Commençons par affirmer que les valeurs absolues n'ont aucune utilité puisque $A\geqslant 0$ et $\Phi(A)\in[0,1]$.
Remarquons ensuite que l'on a $\frac{\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\underset{t\to+\infty}{=}o\left(\frac{1}{t^2}\right)$. Donc il existe $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que pour tout $t\geqslant\alpha$:

$$\left|\frac{\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\right|\leqslant\frac{\epsilon}{t^2}.$$

Par croissance (et convergence) de l'intégrale, on a pour $A\geqslant\alpha$:

$$\int_A^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{d}t\leqslant\int_A^{+\infty}\frac{\epsilon}{t^2}\mathrm{d}t.$$

Or pour $\beta\in\mathbb{R}$, on a :

$$\int_A^{\beta}\frac{\epsilon}{t^2}\mathrm{d}t=\left[-\frac{\epsilon}{t}\right]_A^{\beta}=\epsilon\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{\beta}\right)$$

et en faisant tendre β vers $+\infty$, on obtient :

$$\int_A^{+\infty}\frac{\epsilon}{t^2}\mathrm{d}t=\frac{\epsilon}{A}.$$

Donc pour $A\geqslant\alpha$, on a :

$$A(1-\Phi(A))\leqslant A\times\frac{\epsilon}{A}\leqslant\epsilon.$$

D'où finalement :

$$\lim_{A\to+\infty}A(1-\Phi(A))=0.$$

En remettant dans l'égalité et en passant à la limite, on obtient :

$$\boxed{\int_0^{+\infty}(1-\Phi(t))\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.}$$

4 Exercices de concours

Exercice 25 - EDHEC 2018 (modifié) ⋆⋆⋆

TODO

On considère une variable aléatoire X suivant la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$ et on pose $Y = \sqrt{X}$.

1. On rappelle qu'en `Python`, la commande :

```
rd.exponential(1/mu)
```

   du module `numpy.random` simule une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre μ. Écrire une (ou des) commande(s) `Python` utilisant `rd.exponential` et permettant de simuler Y.

2. (a) Déterminer la fonction de répartition F_Y de Y.
   (b) En déduire une densité f_Y de Y.

3. (a) Rappeler la valeur du moment d'ordre 2 d'une variable aléatoire Z suivant la loi normale centrée réduite.
   (b) En déduire que Y possède une espérance et donner sa valeur.

4. On pose $U = 1 - \mathrm{e}^{\frac{X}{2}}$.
   (a) Vérifier que $U(\Omega) = [0, 1[$.
   (b) Déterminer la fonction de répartition F_U de U et reconnaître la loi de U.
   (c) Exprimer X en fonction de U puis en déduire une simulation `Python` de Y utilisant uniquement la fonction `rd.random`.

Exercice 26 - QSP HEC 2009 ⋆⋆⋆⋆

TODO

Soit U une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de loi uniforme sur $]0, 1]$ et soit $q \in]0, 1]$. Déterminer la loi de la variable aléatoire $X = 1 + \left\lfloor \frac{\ln U}{\ln q} \right\rfloor$. où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entirée de x.

Exercice 27 - Oral ESCP 2019 ⋆⋆⋆⋆⋆

TODO

Soit X une variable aléatoire à densité et f une densité de X, supposée continue sur $\mathbb{R}$. On pose $Y = \frac{1}{X}$ et on admet que Y est une variable aléatoire.

1. (a) Exprimer la fonction de répartition F_Y de Y en fonction de celle de X, notée F_X.
   (b) En déduire que Y est une variable aléatoire à densité et préciser une densité φ de Y.

2. Montrer que Y admet une espérance si et seulement si les intégrales $\int_{-\infty}^0 \frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t$ et $\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t$ sont convergentes, et qu'on a alors :
$$E(Y) = \int_{-\infty}^0 \frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t.$$
   On pourra utiliser le changement de variable $t = \frac{1}{y}$.

3. (a) Déterminer le réel α pour que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(t) = \frac{\alpha}{1+t^2}$ soit une densité de probabilité.
   (b) Soit alors U une variable aléatoire de densité u. Préciser une densité de $U' = \frac{1}{U}$. Les variables U et U' admettent-elles une espérance ?

4. Soit V une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. Déterminer une densité de $V' = \frac{1}{V}$. Les variables aléatoires V et V' admettent-elles une espérance ?

5. Peut-on déterminer une densité w telle que si W est une variable aléatoire de densité w et $W' = \frac{1}{W}$, alors W et W' admettent toutes les deux une espérance ?