TD6 - Matrices

1 Matrices et applications linéaires

Exercice 1 ⋆

Déterminer le rang des matrices suivantes ainsi qu'une base de l'image de l'endomorphisme canoniquement associé. Donner également leurs inverses s'ils existent :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 ⋆

Soit $(x_1, \dots, x_n)$ n réels distincts. On définit l'application linéaire :

$$\psi : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_{n-1}[X] & \to & \mathbb{R}^n \\ P & \mapsto & (P(x_1), P(x_2), \dots, P(x_n)) \end{array} \right. .$$

1. Montrer que ψ est injective.
2. En déduire que ψ est isomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^n$.
3. On définit la matrice $V(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$V(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

   Montrer que si $(x_1, \dots, x_n)$ sont n réels distincts alors $V(x_1, \dots, x_n)$ est inversible.

Exercice 3 ⋆⋆

Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ non nul. Déterminer le rang des matrices :

$$M = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x_n \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{n+1}(\mathbb{R})$$

et :

$$N = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}).$$

Exercice 4 ⋆⋆

Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $\varphi(P) = P(X+1)$.

1. Déterminer la matrice A de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Justifier que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 5 ⋆⋆

Soient $A, B \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AB = 0$. Montrer que l'une au moins de ceux deux matrices est de rang inférieur ou égal à 1.

Exercice 6 - Théorème d'Hadamard⋆⋆⋆⋆

1. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est inversible si et seulement si :

$$\forall X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ AX = 0 \Rightarrow X = 0.$$

2. Soit $A = (A_{i,j}) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ |a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}|.$$

   Soit $X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $AX = 0$. Et soit $i_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $|x_{i_0}| = \max_{i \in [\![1,n]\!]} |x_i|$.
   Montrer que $x_{i_0} = 0$ et en déduire que A est inversible.

2 Changement de base, similitude

Exercice 7 ⋆

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base $\mathbb{R}^3$. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = A = \begin{pmatrix} -1 & 13 & -16 \\ 0 & 7 & -10 \\ 0 & 5 & -7 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $\mathcal{B}' = (e_1, 5e_1 + 3e_2 + 2e_3, 2e_1 + e_2 + e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$. En déduire la valeur de A^4.

Exercice 8 - Matrice d'une projection ⋆⋆

Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 2y - z = 0\}$ et $G = \mathrm{Vect}((-1, 1, 1))$.

1. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$. Déterminer une base de F et en déduire une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ adaptée à la somme directe $F \oplus G$.
2. On note p la projection sur F parallèlement à G.
   (a) Déterminer la matrice de p dans la base $\mathcal{B}$.
   (b) En déduire la matrice p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
   (c) Soit q la projection sur G parallèlement à F. Montrer que $q = \mathrm{Id}_E - p$ et en déduire la matrice de q dans la base canonique.

Exercice 9 ⋆⋆

Soit φ l'application définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}[X]$ qui à un polynôme P associe $\varphi(P) = (X^2 - 1)P' - 2XP$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer la matrice A de φ dans la base canonique notée $\mathcal{B}_{\text{can}}$.
3. On pose $P_1 = (X + 1)^2$, $P_2 = X^2 - 1$ et $P_3 = (X - 1)^2$. Montrer que $\mathcal{B} = (P_1, P_2, P_3)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ puis donner la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}$.
4. En déduire la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$.
5. Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer la matrice de φ^n dans la base $\mathcal{B}$. En déduire la matrice de φ^n dans la base canonique.

Exercice 10 ⋆⋆

Soient A et B deux matrices semblables de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que P est un polynôme annulateur de A si et seulement si P est un polynôme annulateur de B.

Exercice 11 ⋆⋆⋆

On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & 5 & 3 \\ -2 & -4 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ est A.

1. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice de f dans $\mathcal{C}$ soit D.
2. Déterminer une matrice $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $A = PDP^{-1}$. Calculer P^{-1}.
3. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

Exercice 12 ⋆⋆⋆

On pose les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que A est semblable à T et déterminer $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $A = P^{-1}TP$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer T^n puis en déduire A^n.

Exercice 13 ⋆⋆⋆

Dans chaque cas, déterminer si les matrices A et B sont semblables.

a)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

b)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

c)
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

d)
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

3 Trace d'une matrice

Exercice 14 ⋆⋆

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathrm{Tr}({}^tAA) = 0$ si et seulement si $A = 0$.

Exercice 15 ⋆⋆

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Montrer qu'il n'existe pas deux matrices $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB - BA = I_n$.

Exercice 16 ⋆⋆

Soit $F = \{M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{Tr}(M) = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et montrer que si A est une matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ de trace non nulle alors :

$$\mathrm{M}_n(\mathbb{R}) = F \oplus \mathrm{Vect}(A).$$

Exercice 17 ⋆⋆⋆

Soit $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice vérifiant $\mathrm{rg}(M) = \mathrm{Tr}(M) = 1$.

1. Montrer que M est semblable à une matrice dont les $n-1$ premières colonnes sont nulles.
2. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique est M. Montrer que f est un projecteur.

Exercice 18 ⋆⋆⋆⋆

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer l'ensemble des matrices $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $M + {}^tM = \mathrm{Tr}(M)A$.

On pourra distinguer les cas $\mathrm{Tr}(A) = 2$ *et* $\mathrm{Tr}(A) \neq 2$.

Exercice 19 ⋆⋆⋆⋆

1. Soit $A = (A_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que :
$$\mathrm{Tr}({}^tAA) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2.$$
2. Pour $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, on définit l'application φ_A sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ par :
$$\varphi_A(M) = \mathrm{Tr}({}^tAM).$$
   (a) Montrer que φ_A est une forme linéaire sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.
   (b) Prouver que $A \mapsto \varphi_A$ est un isomorphisme de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{L}(\mathrm{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})$.
   (c) Soit φ une forme linéaire sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Prouver qu'il existe un unique $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $\varphi = \varphi_A$.

4 Exercices de concours

Exercice 20 - EDHEC (modifié) ⋆⋆

n désigne un entier supérieur ou égal à 2. On note Tr l'application linéaire qui à une matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ associe sa trace.

1. Montrer que $\mathrm{Im}(\mathrm{Tr}) = \mathbb{R}$.
2. En déduire la dimension de $\ker(\mathrm{Tr})$.
3. Établir que $\mathrm{M}_n(\mathbb{R}) = \ker(\mathrm{Tr}) \oplus \mathrm{Vect}(I_n)$.

Exercice 21 - QSP HEC 2014 ⋆⋆⋆⋆

Soit $A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice non nulle telle que $A^2 = 0$.

Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 22 - QSP HEC 2016 ⋆⋆⋆⋆

Soit $n \geq 2$ et soit $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice définie par :

$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2, \; m_{i,j} = i^{j-1}.$$

Montrer que M est inversible.

Exercice 23 - QSP ESCP 2016 ⋆⋆⋆⋆

Soit $N \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente c'est-à-dire telle qu'il existe $p \geq 1$ tel que $N^p = 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{R})}$.

1. Montrer que la matrice $A = I_n - N$ est inversible et déterminer son inverse.
2. Montrer que $I_n - A^{-1}$ est nilpotente.

Exercice 24 - Oral ESCP 2008 ⋆⋆⋆⋆⋆

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension n^2-1 stable par la multiplication matricielle, c'est-à-dire :

$$\forall (M,M') \in F^2,\ MM' \in F.$$

On suppose que $I_n \notin F$ où I_n désigne la matrice identité de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\mathrm{M}_n(\mathbb{R}) = F \oplus \mathrm{Vect}(I_n)$.
2. (a) Soit p le projecteur de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathrm{Vect}(I_n)$ parallèlement à F. Montrer que :
$$\forall (M,M') \in (\mathrm{M}_n(\mathbb{R}))^2,\ p(MM') = p(M)p(M').$$
   (b) Montrer que pour toute matrice M de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^2 \in F$ alors $M \in F$.
   (c) Soit $(E_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ la base canonique de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer $E_{i,j} \times E_{k,\ell}$ pour tout $(i,j,k,\ell) \in [\![1,n]\!]^4$.
   (d) Montrer que F contient la base canonique de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.
   (e) Conclure.

Exercice 25 - Oral ESCP 2018 ⋆⋆⋆⋆⋆

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie $n \geq 2$. Soit u un endomorphisme de E. On suppose qu'il existe un entier $p \in \mathbb{N}^\star$ tel que $u^p = 0$ et $u^{p-1} \neq 0$, où 0 désigne l'endomorphisme nul. Un tel endomorphisme est dit *nilpotent*.

1. (a) Montrer que pour tout entier $k \geq 2$, on a $u(\ker(u^k)) \subset \ker(u^{k-1})$.
   (b) Montrer que l'on a :
$$\ker(u) \subset \ker(u^2) \subset \cdots \subset \ker(u^p) = E.$$
   Prouver que toutes ces inclusions sont strictes.
   (c) Soit $\mathcal{B}_1$ une base de $\ker(u)$. On la complète en une base $\mathcal{B}_2$ de $\ker(u^2)$. On continue le procédé en complétant, pour tout entier $k \in [\![1,p-1]\!]$ une base $\mathcal{B}_k$ de $\ker(u^k)$ en une base $\mathcal{B}_{k+1}$ de $\ker(u^{k+1})$. On trouve ainsi une succession de bases $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2 \subset \cdots \subset \mathcal{B}_p$ où $\mathcal{B}_p$ est une base de E.
   Écrire la matrice M de u dans la base $\mathcal{B}_p$. Préciser sa diagonale.
2. On note $\mathcal{N}$ l'ensemble des matrice nilpotentes de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ où $n \geq 2$. On note Tr l'application trace.
   (a) L'ensemble $\mathcal{N}$ est-il un espace vectoriel ?
   (b) Déterminer la dimension de l'espace vectoriel $\ker(\mathrm{Tr})$.
   (c) Montrer que $\mathrm{Vect}(\mathcal{N}) \subset \ker(\mathrm{Tr})$.
3. Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on note $E_{i,j}$ la matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ dont le seul coefficient non-nul vaut 1 et se situe à l'intersection de la ligne i et de la colonne j.
   Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on pose $N_k = E_{1,1} - E_{1,k} + E_{k,1} - E_{k,k}$.
   (a) Montrer que la famille $\{(N_k)_{2\leq k\leq n}\}, (E_{i,j})_{i\neq j}\}$ est une famille libre.
   (b) En déduire l'égalité $\mathrm{Vect}(\mathcal{N}) = \ker(\mathrm{Tr})$.