DM2 - Suites de variables aléatoires

À rendre le vendredi 18/10/2024

Exercice 1 - ECRICOME ECE 2021 (Exercice 3)

On lance indéfiniment une pièce équilibrée.
On s'intéresse au rang du lancer auquel on obtient pour la première fois deux « Pile » consécutifs. On modélise cette expérience aléatoire par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On note alors X la variable aléatoire égale au rang du lancer où, pour la première fois, on obtient deux « Pile » consécutifs.
Si on n'obtient jamais deux « Pile » consécutifs, on conviendra que X vaut -1.
Par exemple, si on obtient dans cet ordre : Pile, Face, Face, Pile, Pile, Pile, Face, ... alors X prend la valeur 5.
Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on pose les événements suivants :

- F_n : « Obtenir Face au $n^{\text{ème}}$ lancer »
- P_n : « Obtenir Pile au $n^{\text{ème}}$ lancer »

La suite $(P_n)_{n\geqslant 1}$ est donc une suite d'événements mutuellement indépendants.
Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on pose les événements suivants :

- U_n : « Au cours des n premiers lancers, on obtient au moins une fois la succession de deux piles consécutifs »
- $B_n = P_{n-1} \cap P_n$.

Enfin, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on note :

$$u_n = P(U_n) \quad \text{et} \quad a_n = P(X = n).$$

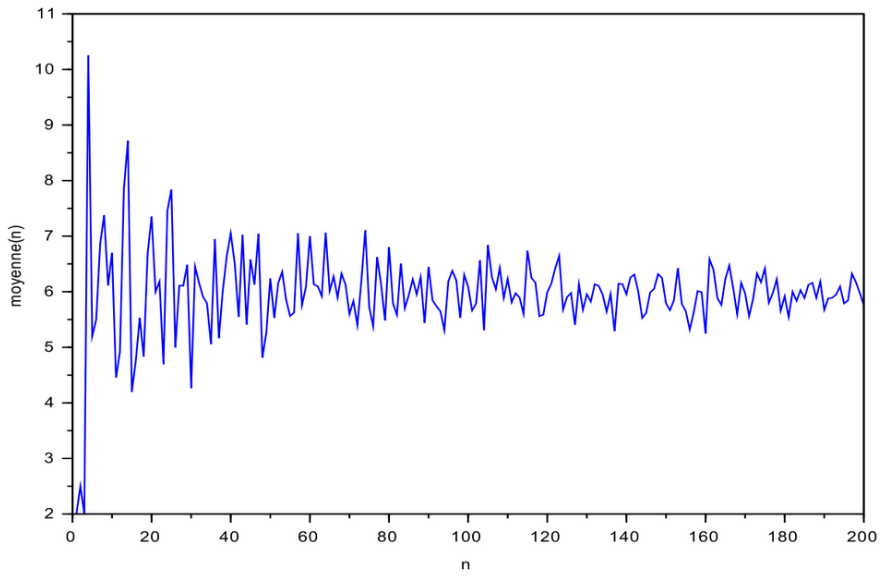
Partie I

1. Exprimer les événements $[X = 2]$, $[X = 3]$ et $[X = 4]$ à l'aide de certains événements P_k et F_k.
   En déduire les valeurs de a_2, a_3 et a_4.
2. Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 : $u_n = \sum_{k=2}^{n} a_k$.
3. (a) Recopier et compléter la fonction `Python` ci-dessous afin qu'elle simule les lancers de la pièce jusqu'à l'obtention de deux « Pile » consécutifs et qu'elle renvoie le nombre de lancers effectués.

```python
def simulX():
    tirs = 0
    pile = 0
    while pile ............ :
        if rd.random() < 1/2:
            pile = pile + 1
        else:
            pile = ............
        tirs = ............
    return tirs
```

   (b) Écrire une fonction `Python` d'en-tête `def moyenne(n):` qui simule n fois l'expériuence ci-dessus et renvoie la moyenne des résultats obtenus.

   (c) On calcule `moyenne(n)` pour chaque entier n de $[\![1, 200]\!]$ et on trace les résultats obtenus dans le graphe suivant :



Que pouvez-vous conjecturer sur la variable aléatoire X ?

Partie II

4. (a) Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :
$$P(U_{n+1}) = P(U_n) + P(B_{n+1}) - P(U_n \cap B_{n+1}).$$
(b) Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 4 :
$$U_n \cap B_{n+1} = (U_{n-2} \cap F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}) \cup (P_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}).$$
(c) En déduire que pour tout entier n supérieur ou égal à 4 :
$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{8}(1 - u_{n-2}).$$
5. Démonter que la suite $(u_n)_{n\geqslant 4}$ est croissante, puis qu'elle converge vers 1.
6. En déduire que :
$$P(X = -1) = 1 - P\left(\bigcup_{n=2}^{+\infty} U_n\right) = 0.$$

Partie III - Étude de l'espérance de X

Dans cette partie, on pose pour tout entier $n \geqslant 2$:
$$v_n = 1 - u_n \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{k=2}^{n} kP(X = k).$$

7. Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 4 :
$$v_n - v_{n+1} = \frac{1}{8} v_{n-2}.$$
8. Justifier que pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :
$$P(X = n + 1) = v_n - v_{n+1}.$$
9. Démontrer alors par récurrence que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :
$$S_n = 6 - 8v_{n+2} - nv_n.$$
10. En déduire que la suite $(S_n)_{n\geqslant 2}$ est croissante et majorée.
11. Montrer que X admet une espérance.
12. (a) Démontrer que la suite $(nv_n)_{n\geqslant 2}$ converge vers un réel λ.
(b) Montrer que si λ est non nul, alors la série de terme général v_n est divergente.
À l'aide de l'égalité démontée à la question 7, obtenir une contradiction.
(c) Donner alors la valeur de l'espérance de X.