Espaces vectoriels de dimension finie

Exercices d'application directe du cours et incontournables

Exercice 1 (Combinaisons linéaires)

Das chaque cas, déterminer la combinaison linéaire demandée.

1. Dans $\mathbb{R}^4$, $u_1 = (1,2,3,4)$, $u_2 = (1,-3,5,0)$ et $u_2 = (-2,3,0,-1)$ — $2u_1 + 3u_2 - u_3$
2. Dans $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ — $4A - 3B - 2C$
3. Dans $\mathbb{R}_3[x]$, $P_1 = x^3 - x^2 + 3$, $P_2 = x^2 + x + 1$ et $P_3 = 2x^3 + 3x^2$ — $2P_1 + 3P_2 - P_3$

Exercice 2 (sous-espaces vectoriels)

Parmi les ensembles suivants, munis des opérations usuelles, lesquels sont des espaces vectoriels ?

1. L'ensemble $\{(x,0,2x,-x), x \in \mathbb{R}\}$
2. L'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x = -2y\}$
3. L'ensemble $\{(3x,-x,1), x \in \mathbb{R}\}$
4. L'ensemble $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, 2x + y = 0 \text{ et } z = -1\}$
5. L'ensemble $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x = 2y = 3z\}$
6. L'ensemble $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, 3x + 2y - 5z = 0 \text{ et } x = 3z\}$
7. L'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 2
8. L'ensemble des polynômes de degré exactement 2
9. L'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
10. L'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

Exercice 3 (Familles libres ou liées)

Pour chacune des familles suivantes, indiquer s'il s'agit d'une famille libre.

1. $a_1 = ((1,2,3),\ (0,1,-1))$;
2. $a_2 = ((-2,4,8,-7))$;
3. $a_3 = ((0,0,0))$;
4. $a_4 = ((1,-2),\ (2,3),\ (6,0))$;
5. $a_5 = ((1,1,1),\ (1,2,0),\ (1,1,0))$;
6. $a_6 = ((1,1,2),\ (2,2,2),\ (0,0,1))$;
7. $a_7 = (1+x,\ x^2, 3+2x+x^2)$;
8. $a_8 = (3,\ x+1,\ x^2 - 3x + 2)$;
9. $a_9 = \left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$.

Exercice 4 (sous-espaces vectoriels engendrés)

Montrer que chacun des ensembles suivants est un espace vectoriel en l'exprimant comme un espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs. En donner une base et la dimension.

1. $H_1 = \{(x,y,z) : x - y - z = 0\}$
2. $H_2 = \{(x,y,z) : x - 3y = 0\}$
3. $H_3 = \{(x,y,z) : x - 3y = y - z = 0\}$
4. $H_4 = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a + 3b = 0\right\}$
5. $H_5 = \{(x,y,z,t) : x + y + z + t = x - y + z - t = 0\}$
6. $H_6 = \left\{\begin{pmatrix} a & 3b+c \\ -a+b & a+b+c \end{pmatrix}, (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\right\}$

Exercice 5 (Nature d'une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$)

Pour chacune des familles de vecteurs de $\mathbb{R}^3$, dire si elle est libre et/ou génératrice de $\mathbb{R}^3$ et donner son rang.

1. $((1,2,1),\ (1,0,-1))$
2. $((7,6,9),\ (1,4,6),\ (3,6,2))$
3. $((3,6,2),\ (6,12,-4))$
4. $((2,4,-6),\ (-3,-6,9))$
5. $((3,6,2),\ (1,0,3),\ (0,0,-5))$
6. $((1,2,3),\ (-4,1,5), (-3,3,8),\ (5,1,-2))$

Exercice 6 (Bases)

Dans chacun des cas suivants, déterminer si la famille a est une base de E. Lorsqu'il s'agit de bases, donner la matrice de passage de la base canonique à cette nouvelle base.

1. $a = ((1,2,3),\ (2,1,4),\ (1,4,2))$ et $E = \mathbb{R}^3$.
2. $a = ((1,3),\ (2,4))$ et $E = \mathbb{R}^2$.
3. $a = (1 + x + x^2,\ 3,\ x+1)$ et $E = \mathbb{R}_2[x]$.
4. $a = (x^2 + 3,\ x + 2)$ et $E = \mathbb{R}_2[x]$.
5. $a = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right)$ et $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
6. $a = \left(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right)$ et $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 7 (les bases de la réduction)

On considère la matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivante : $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

Pour tout réel λ, on note $E_\lambda(A)$ l'ensemble des vecteurs colonne X de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ solutions de l'équation $AX = \lambda X$.

1. Justifier que $E_3(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et en déterminer une base et la dimension.
2. Justifier que $E_{-3}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et en déterminer une base et la dimension.
3. Montrer que la concaténation des bases trouvées dans les questions 1 et 2 forme une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ que l'on notera $\mathcal{B}'$.
4. Déterminer la matrice de passage P de la base canonique $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.
5. Déterminer la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$.
6. Calculer $P^{-1}AP$.

Exercices d'approfondissement

Exercice 8 (sous-espaces vectoriels)

Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels et dans la mesure du possible, en donner une base et la dimension.

1. L'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$
2. L'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_3[x]$ dont la dérivée s'annule en 1
3. L'ensemble $F_1 = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : AM = 0\}$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
4. Montrer que $F_3 = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : a - 2b + c = 0\right\}$ est un espace vectoriel.
5. L'ensemble $F_4 = \left\{\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\right\}$
6. L'ensemble F_5 des matrices triangulaires supérieures.

Exercice 9 (Intersection de deux sous espaces vectoriels - cas général)

Montrer que l'intersection de deux sous espaces vectoriels de E est un sous espace vectoriel de E.

Exercice 10 (Coordonnées d'un vecteur dans une base)

1. Donner les coordonnées du vecteur $(4, 5, -3)$ dans la base $((0, 1, 2),\ (1, 0, -1),\ (0, 0, 1))$.
2. Donner les coordonnées du vecteur $3x^2 + x - 2$ dans la base $(1,\ x + 1,\ x^2 + x + 1)$.
3. Donner les coordonnées du vecteur $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base $\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$.

Exercice 11 (Changement de base dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$)

Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que la famille $\mathscr{B} = (A, B, C, D)$ est une base de $\mathcal{M}(\mathbb{R})$.
2. Écrire la matrice de passage P de la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ à la base $\mathscr{B}$.
3. Justifier l'inversibilité de P et déterminer son inverse.
4. Déterminer les coordonnées de $M = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathscr{B}$ directement (sans utiliser la matrice de passage).
5. Retrouver le résultat en utilisant la matrice de passage.

Exercice 12 (Étude d'un sous espace vectoriel)

On considère dans cet exercice l'ensemble E des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de la forme $\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$, où a, b et c sont trois réels.

1. Montrer que E est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. On note $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Démontrer que la famille $\mathscr{B} = (I,\ J,\ J^2)$ est une base de E. En déduire la dimension de E.
3. Déterminer J^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
4. Démontrer que l'ensemble E est stable par multiplication, c'est-à-dire que si $M \in E$ et $M' \in E$, alors $MM' \in E$.

Exercice tiré d'annales : d'après Ecricome 2008

les cubes pourront travailler sur l'énoncé original glané sur le web

A tout couple (a, b) de deux réels, on associe la matrice $M(a, b)$ définie par $M(a, b) = \begin{pmatrix} a+2b & -b & -2b \\ 2b & a-b & -4b \\ -b & b & a+3b \end{pmatrix}$.

On désigne par E l'ensemble des matrices $M(a, b)$ où a et b décrivent $\mathbb{R}$. Ainsi : $E = \{M(a, b),\ (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.

On note I la matrice identité $M(1, 0)$ et A la matrice suivante : $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre 3.
2. Donner une base de E ainsi que sa dimension.
3. Résoudre $AX = X$ où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Montrer que l'ensemble des solutions de cette équation est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et en donner une base et sa dimension.
4. Résoudre $AX = 2X$ où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Montrer que l'ensemble des solutions de cette équation est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et en donner une base et sa dimension.
5. On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et la matrice $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   Montrer que P est inversible et déterminer son inverse, vérifier que $D = P^{-1}AP$ puis donner une expression de la matrice P^{-1}.
6. Prouver que la matrice $D(a, b) = P^{-1}M(a, b)P$ est une matrice diagonale.
7. Montrer que $M(a, b)$ est inversible si et seulement si $D(a, b)$ est inversible.
   En déduire une condition nécessaire et suffisante portant sur a et b pour que $M(a, b)$ soit inversible.
8. Prouver que $[M(a, b)]^2 = I$ si et seulement si $[D(a, b)]^2 = I$.
   En déduire l'existence de quatre matrices $M(a, b)$ que l'on déterminera, vérifiant $[M(a, b)]^2 = I$.