Correction - Espaces vectoriels de dimension finie

Les exercices du cours non corrigés en classe

Exercice 3

3. $E=\mathbb{R}_2[x]$, $F=\{P\in\mathbb{R}_2[x],\ \forall x\in\mathbb{R}, P(x)+xP'(x)=0\}$ Prenons un élément P de F. P étant un polynôme de degré inférieur ou égal à 2, il existe 3 réels a, b et c tels que $P=ax^2+bx+c$ et par conséquent sa dérivée P' vérifie $P'=2ax+b$
Dire que P est dans F revient donc à dire que $\forall x\in\mathbb{R}, P(x)+xP'(x)=0$, autrement dit, que $ax^2+bx+c+x(2ax+b)=0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.
En rassemblant selon les puissances croissantes, on obtient que $\forall x\in\mathbb{R}$, $3ax^2+2bx+c=0$.
Par identification des polynômes, cela revient à résoudre le système $\begin{cases}3a=0\\2b=0\\c=0\end{cases}$ c'est à dire que $a=b=c=0$.
Finalement, le seul polynôme P qui convient est le polynôme $P=0x^2+0x+0$ Il s'agit du polynôme nul.
Conclusion : $\boxed{F=\{0\}}$

Exercices d'application directe du cours et incontournables

Exercice 1 (Combinaisons linéaires)

1. $2u_1+3u_2-u_3=(7,-8,21,9)$ **2.** $4A-3B-2C=\begin{pmatrix}-12&0&-7\\6&2&1\end{pmatrix}$ **3.** $2P_1+3P_2-P_3=-2x^2+3x+9$

Exercice 2 (sous-espaces vectoriels)

1. $\{(x,0,2x,-x), x\in\mathbb{R}\}=\text{Vect}\big((1,0,2,-1)\big)$. C'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et donc un $\mathbb{R}-$espace vectoriel.
2. $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, x=-2y\}=\{(-2y,y), y\in\mathbb{R}\}=\text{Vect}\big((-2,1)\big)$. C'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ et donc un espace vectoriel.
5. L'ensemble $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, x=2y=3z\}\underset{3z=6t}{=}\{(6t,3t,2t), t\in\mathbb{R}\}=\text{Vect}\big((6,3,2)\big)$ blablabla
6. Un vecteur (x,y,z) de l'ensemble proposé vérifie $\begin{cases}3x+2y-5z=0\\ x=3z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-2z\\x=3z\end{cases}$ Il s'agit donc de $\text{Vect}\big((3,-2,1)\big)$ blablabla
7. C'est du cours et c'est un sous-espace vectoriel de référence.
10. Il s'agit de l'ensemble $\text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right)$ blablabla

Les ensembles des items **3.**, **4.**, **8.** et **9.** ne sont pas des espaces vectoriels car ils ne contiennent pas le vecteur nul.

Exercice 3 (Familles libres ou liées)

Pour chacune des familles suivantes, indiquer s'il s'agit d'une famille libre.

1. a_1 est libre car les vecteurs qui la composent ne sont pas colinéaires (leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles).
2. a_2 est libre car l'unique vecteur qui la compose est non nul.
3. a_3 est liée car l'unique vecteur qui la compose est nul.
4. a_4 est liée car c'est une famille de trois vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 2.
5. Montrons que la seule combinaison linéaire nulle des éléments de la famille a_5 est la combinaison linéaire triviale.
Soient $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3$ tels que $\alpha(1,1,1)+\beta(1,2,0)+\gamma(1,1,0))=(0,0,0)$.
Traduisons cette égalité par un système :
$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=0\\\alpha+2\beta+\gamma=0\\\alpha=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta+\gamma=0\\2\beta+\gamma=0\\\alpha=0\end{cases}\underset{L_2\leftarrow L_2-2L_1}{\Leftrightarrow}\begin{cases}\beta+\gamma=0\\\gamma=0\\\alpha=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=0\\\beta=0\\\gamma=0\end{cases}$ donc a_5 est libre.
6. Appelons e_1, e_2 et e_3 les trois vecteurs de la famille a_6.
Remarquons que $e_2=2e_1-2e_3$, ce qui signifie que a_6 est liée, elle n'est donc pas libre.
7. Montrons que la seule combinaison linéaire nulle des éléments de la famille a_5 est la combinaison linéaire triviale.
Étudier la liberté de $a7$ revient donc à résoudre l'équation (*) $a(1+x)+bx^2+c(3+2x+x^2)=0$ d'inconnues a, b et c réelles.
Or $(*)\ \Leftrightarrow\ (b+c)x^2+(a+2c)x+(a+3c)=0$.
Par identification des polynômes, cela revient à résoudre $\begin{cases}b+c=0\\a+2c=0\\a+3c=0\end{cases}\Leftrightarrow\cdots\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\b=0\\c=0\end{cases}$ a_7 est donc libre.
8. a_8 est libre car c'est une famille de polynômes à degrés échelonnés.

9. a_9 est libre (même méthode que pour l'item 5).

Exercice 4 (sous-espaces vectoriels engendrés)

1. Un vecteur (x,y,z) de l'ensemble H_1 vérifie $x-y-z=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-y-z \\ y=y \\ z=z \end{cases}$

   Donc $H_1=\{(y+z,y,z),\ (y,z)\in\mathbb{R}^2\}=\{y(1,1,0)+z(1,0,1),\ (y,z)\in\mathbb{R}^2\}=\boxed{\mathrm{Vect}\big((1,1,0),(1,0,1)\big)}$

   H_1 est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, en tant que sous-espace engendré par une famille de vecteurs.

   $\boxed{\text{la famille } \big((1,1,0),(1,0,1)\big)}$ engendre ce sous-espace vectoriel et est libre (puisque ces deux vecteurs sont non colinéaires).

   C' $\boxed{\text{est donc une base de } H_1}$. Puisqu'elle est constituée de 2 vecteurs, $\boxed{H_1 \text{ est un sous-espace vectoriel de dimension 2.}}$

Pour le reste de l'exercice, il faut garder cette rédaction, ne sont données ici que les réponses brutes :

2. $H_2=\mathrm{Vect}\big((3,1,0),(0,0,1)\big)$, la famille $\big((3,1,0),(0,0,1)\big)$ est une base de H_2, espace vectoriel de dimension 2.
3. $H_3=\mathrm{Vect}\big((3,1,1)\big)$ la famille $\big((3,1,1)\big)$ est une base de H_3, espace vectoriel de dimension 1.
4. $H_4=\mathrm{Vect}\Big(\left(\begin{smallmatrix}-3&1\\0&0\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right)\Big)$. La famille $\Big(\left(\begin{smallmatrix}-3&1\\0&0\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right)\Big)$ est une base de H_4, espace vectoriel de dimension 3.
5. $H_5=\mathrm{Vect}\big((1,0,-1,0),(0,1,0,-1)\big)$, la famille $\big((1,0,-1,0),(0,1,0,-1)\big)$ est une base de H_5, espace vectoriel de dimension 2.
6. $H_6=\mathrm{Vect}\Big(\left(\begin{smallmatrix}1&0\\-1&1\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}0&3\\1&1\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)\Big)$. La famille $\Big(\left(\begin{smallmatrix}1&0\\-1&1\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}0&3\\1&1\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)\Big)$ est une base de H_6, espace vectoriel de dimension 3.

Exercice 5 (Nature d'une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$)

1. libre (famille de deux vecteurs non colinéaires) mais pas génératrice (famille de 2 vecteurs dans un espace de dimension 3)
2. Il est facile de démontrer que toute combinaison linéaire nulle est la combinaison triviale (démo laissée au lecteur s'il estime encore devoir s'entraîner là-dessus) et que la famille est donc libre. Puisque c'est une famille libre de 3 vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 3, c'est donc une base de cet espace vectoriel, et en tant que base de $\mathbb{R}^3$, elle est donc génératrice de $\mathbb{R}^3$.
3. Même démarche et même conclusion que l'item 1.
4. Famille liée car famille de deux vecteurs colinéaires, et non génératrice puisque rang est égal à 1 dans un espace vectoriel de dimension 3.
5. Libre génératrice.
6. Au premier coup d'oeil, cette famille est trop grande pour être libre puisqu'elle a 4 vecteurs dans un espace de dimension 3.
   En y regardant de plus près, et en appelant e_1, e_2, e_3 et e_4 les vecteurs de cette famille, $e_3=e_1+e_2$ et $e_4=e_1-e_2$ donc toute combinaison linéaire des 4 éléments de cette famille peut en réalité s'écrire comme combinaison linéaire de e_1 et e_2 uniquement. Cette famille est donc de rang 2, et elle n'est donc pas génératrice puisque l'on est dans un espace de dimension 3.

Exercice 6 (Bases)

Sauf pour les exercices inédits, je ne détaille pas ici la rédaction mais donne les réponses brutes :

1. a est une base de $\mathbb{R}^3$. La matrice de passage de la base canonique à la base a est $\left(\begin{smallmatrix}1&2&1\\2&1&4\\3&4&2\end{smallmatrix}\right)$.
2. a est une base de $\mathbb{R}^2$. La matrice de passage de la base canonique à la base a est $\left(\begin{smallmatrix}1&2\\3&4\end{smallmatrix}\right)$.
3. a est une famille libre car famille de polynômes à degrés échelonnés. Puisque c'est une famille de 3 polynômes dans un espace de polynômes de dimension 3, c'est une base de $\mathbb{R}_2[x]$. la matrice de passage de la base canonique à la base a est $\left(\begin{smallmatrix}1&3&1\\1&0&1\\1&0&0\end{smallmatrix}\right)$.
4. a est une famille de 2 vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 3, ce n'est donc pas une base.
5. On pourrait montrer que toute combinaison linéaire nulle est la combinaison triviale pour montrer que a est libre mais il est plus rapide de constater ici que a est une famille à zéros échelonnés. Elle est donc libre, et puisque c'est une famille de 4 vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 4, il s'agit d'une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
   La matrice de passage de la base canonique à la base a est $\left(\begin{smallmatrix}1&1&1&0\\2&0&0&0\\1&1&0&0\\2&2&2&2\end{smallmatrix}\right)$.
6. a est une famille de 3 vecteurs dans un espace de dimension 4, ce n'est donc pas une base.

Exercice 7 (les bases de la réduction)

1. Soit $X=\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)$ un vecteur colonne de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Dire que X est dans $E_3(A)$ revient à dire que :

$$AX=3X \Leftrightarrow (A-3I)X=0 \Leftrightarrow \begin{cases} -5x-2y+z=0 \\ -2x-2y-2z=0 \\ x-2y-5z=0 \end{cases} \underset{\substack{L_2\leftarrow 2L_1-5L_2 \\ L_3\leftarrow L_1+5L_3}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -5x-2y+z=0 \\ 6y+12z=0 \\ -12y-24z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=z \\ y=-2z \end{cases}$$

   une colonne X de $E_3(A)$ s'écrit alors nécessairement $\left(\begin{smallmatrix}z\\-2z\\z\end{smallmatrix}\right)$ et donc $E_3(A)=\mathrm{Vect}\Big(\left(\begin{smallmatrix}1\\-2\\1\end{smallmatrix}\right)\Big)$.

   $E_3(A)$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ de dimension 1 (autrement dit une droite vectorielle) et de base la famille : $\Big(\left(\begin{smallmatrix}1\\-2\\1\end{smallmatrix}\right)\Big)$

2. Une rédaction et un raisonnement similaire donne $E_{-3}(A)=\text{Vect}\left(\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$.
La famille $\left(\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ étant une famille de deux vecteurs non colinéaires, elle forme une famille libre. Puisqu'elle engendre $E_{-3}(A)$, c'en est une base et par suite $E_{-3}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ de dimension 2.
3. Montrons que seule la combinaison linéaire triviale des éléments de la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ donne une combinaison linéaire nulle.
Soient (a,b,c) trois réels tels que $a\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$. Il est alors équivalent de dire :
$$\begin{cases}a+2b-c=0\\ -2a+b=0\\ a+c=0\end{cases}\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases}a=0\\ b=0\\ c=0\end{cases}$$
Donc la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est libre. Puisqu'il s'agit d'une famille de trois éléments dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ qui est de dimension 3, c'est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
4. $P=\begin{pmatrix}1&2&-1\\-2&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$
5. On applique la méthode de Gauss-Jordan (laissé au lecteur) et on trouve : $P^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1&-2&1\\2&2&2\\-1&2&5\end{pmatrix}$
6. Après calculs laissés au lecteur, $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&-3&0\\0&0&-3\end{pmatrix}=\text{diag}(3,-3,-3)$

Exercices d'approfondissement

Exercice 8 (sous-espaces vectoriels)

1. Rappels :
   • Une matrice symétrique M est caractérisée par le fait qu'elle est égale à sa transposée ${}^tM$.
   • La transposée d'une matrice est obtenue en intervertissant les lignes et les colonnes d'origine.
   On utilise ici la méthode en trois points. (la méthode exprimant l'ensemble en tant que sous-espace vectoriel engendré est ici possible mais assez fastidieuse vu la taille des matrices). Notons $\mathcal{S}_4(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques d'ordre 4.

   ▶ Il est évident que $F\subset\mathcal{M}_4(R)$, qui est un espace vectoriel de référence.
   ▶ La matrice nulle est bien dans F car c'est une matrice symétrique.
   ▶ Soient deux matrices M et N de F et λ un réel.
   On a alors ${}^tM=M$ et ${}^tN=N$. Montrons que $\lambda M+N\in F$.
   ${}^t(\lambda M+N)\underset{\text{la transposition est une appl. lin.}}{=}\lambda{}^tM+{}^tN\underset{\substack{M\in F\\N\in F}}{=}\lambda M+N$.
   Donc $\lambda M+N\in F$ et par suite F est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$

   NB : Ceux qui veulent tout de même utiliser la technique de l'espace vectoriel engendré remarquerons que toute matrice de F s'écrit de la forme : $\begin{pmatrix}a&b&c&d\\b&e&f&g\\c&f&h&i\\d&g&i&j\end{pmatrix}$ et trouverons les 10 matrices de la base de F : $\left(\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\dots\right)$ (et de justifier que c'est une base)
   Il est à remarquer que cette méthode aurait été celle à utiliser si on demandait de manière impérative la dimension et une base de F.
2. Là encore on a le choix entre les deux méthodes selon que la dimension est impérativement demandée ou pas.
   Notons F l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_3[x]$ dont la dérivée s'annule en 1.

   • Première méthode :
   ▶ Il est évident que $F\subset\mathbb{R}_3[x]$, qui est un espace vectoriel de référence.
   ▶ la dérivée du polynôme nul est le polynôme nul, qui s'annule évidemment en 1. Le polynôme nul est donc un élément de F.
   ▶ Soient P et Q deux polynômes de F et λ un réel.
   On a alors $P'(1)=0$ et $Q'(1)=0$.
   Montrons que $\lambda P+Q\in F$. On cherche donc à calculer $(\lambda P+Q)'(1)$.
   $(\lambda P+Q)'(1)\underset{\text{la dérivation est une appl. lin.}}{=}\lambda P'(1)+Q'(1)\underset{\substack{P\in F\\Q\in F}}{=}\lambda 0+0=0$
   Donc $\lambda P+Q\in F$ et par suite F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[x]$.

- Deuxième méthode :
Soit P un polynôme de $\mathbb{R}_3[x]$. Il est donc de la forme $P = ax^3 + bx^2 + cx + d$.
donc $P' = 3ax^2 + 2bx^2 + c$ donc $P'(1) = 3a + 2b + c$.
Donc $c = -2b - 3a$ donc P est de la forme $P = a^3 + bx^2 + (-2b - 3a)x + d$.
Donc $P = a(x^3 - 3x) + b(x^2 - 2x) + d$ donc $F = \text{Vect}(x^3 - 3x, x^2 - 2x, 1)$.
$(x^3 - 3x, x^2 - 2x, 1)$ étant une famille de polynômes à degrés échelonnés, c'est une famille libre. De plus, elle engendre F donc c'est une base de F. Puisqu'elle a trois éléments, F est donc un espace vectoriel de dimension 3.

3. La méthode en trois points est ici impérative.

- $F_1 \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
- $O_n \in F_1$ car $AO = O$
- $\forall (M,N) \in F_1^2,\ \lambda \in \mathbb{R}, \qquad A(M + \lambda N) = AM + \lambda AN \underset{\substack{M\in F_1\\ N\in F_1}}{=} O + \lambda O = O \qquad M + \lambda N \in F_1.$

Donc F_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est donc un $\mathbb{R}-$espace vectoriel.

4. Ici la méthode "du vect" est ici particulièrement adaptée.

$$\begin{aligned}
M \in F_3 &\Leftrightarrow M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} && \text{avec}(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \text{ tel que } a = 2b - c \\
&\Leftrightarrow M = \begin{pmatrix} 2b-c & b \\ c & d \end{pmatrix} && \text{avec}(b,c,d) \in \mathbb{R}^3 \\
&\Leftrightarrow M = b\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} && \text{avec}(b,c,d) \in \mathbb{R}^3
\end{aligned}$$

Donc $F = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$
On montrerait facilement que seule la combinaison linéaire triviale de ces trois matrices est la combinaison linéaire nulle et ainsi que la famille $\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ est libre.
Comme c'est de plus une famille de 3 matrices qui engendrent F, c'est une base de F, qui est donc un espace vectoriel de dimension 3.

5. On montre facilement que $F_4 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$, que $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$ est une famille libre qui est donc une base de F_4 et que $\dim F_4 = 3$

6. On montre que $F_4 = \text{Vect}\left(E_{i,j}, (i,j) \in [\![1,n]\!], i \leq j\right)$ et que $\dim F_4 = \frac{n(n+1)}{2}$.
Cet exemple est plus théorique et difficile et ceux qui veulent me proposer une rédaction peuvent le faire sur feuille.

Exercice 9 (Intersection de deux sous espaces vectoriels - cas général)

Appelons F et G ces deux sous-espaces vectoriels. Montrons que $F \cap G$ est une sous-espace vectoriel de E. N'ayant à peu près aucun renseignement sur E, F et G, il n'y a pas d'autre moyen ici que d'employer la méthode en trois points.

- $F \cap G \subset E$ car $F \subset E$ et $G \subset E$.
- $0_E \in F$ et $0_E \subset G$ car ce sont deux espaces vectoriels donc $0_E \in F \cap G$.
- $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall (u,v) \in E^2,\ \lambda u + v \in F$ car F est un sev de E et $\lambda u + v \in G$ car G est un sev de E donc $\lambda u + v \in F \cap G$ et donc $F \cap G$ est un sev de E

Exercice 10 (Coordonnées d'un vecteur dans une base)

1. Notons u le vecteur avec lequel on travaille et notons P la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}$ à la base $((0,1,2),\ (1,0,-1),\ (0,0,1))$ que l'on notera $\mathcal{B}'$.
On a alors $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
Notons $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ et $X' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)$. On a donc $X = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ et on sait que $X = PX'$.

Première méthode : en faisant une résolution directe :

En notant $X' = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, on cherche à résoudre $\begin{cases} b = 4 \\ a = 5 \\ 2a - b + c = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 4 \\ c = -9 \end{cases}$

Deuxième méthode : en utilisant P^{-1}

En utilisant la méthode de Gauss-Jordan, on trouve facilement que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Or $X = PX' \Leftrightarrow X' = P^{-1}X$ et $P^{-1}X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -9 \end{pmatrix}$

Dans les deux cas, on trouve que les coordonnées de u dans la nouvelle base sont $(5,4,-9)$.

2. Notons $Q = 3x^2 + x - 2$, et appelons $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$ et $\mathcal{B}'$ la base $(1,\ x+1,\ x^2 + x + 1)$.
La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est donnée par $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et les coordonnées de Q dans la base canonique sont : $(-2,1,3)$.

En adoptant les mêmes notations et la même rédaction que la question précédente, on trouve que $X = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.
Cela signifie que les coordonnées de Q dans la nouvelle base sont $(-3, -2, 3)$.
Cela signifie que $Q = -3 \times 1 - 2(x+1) + 3(x^2 + x + 1)$ (on retrouve effectivement l'expression de Q données dans l'énoncé en développant et ordonnant suivant les puissances décroissantes).

NB : Dans cet item, on prendra garde à ne pas appeler P à la fois le polynôme avec lequel on travaille et la matrice de passage !

3. La matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a pour coordonnées $(1,1,1,1)$ dans la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
En notant $\mathscr{B}'$ la base $\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$, et P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$, on trouve : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
En posant $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(M)$ et $X' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(M)$, on trouve que $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et on note $X' = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$
Puisque $X = PX'$, le problème posé revient à résoudre : $\begin{cases} a + b + c = 1 \\ 2a = 1 \\ a + b = 1 \\ 2a + 2b + 2c + d = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$ résolution par substitution facile $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1/2 \\ b = 1/2 \\ c = 0 \\ d = -1 \end{cases}$
Les coordonnées de $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ dans la nouvelle base sont donc $(1/2, 1/2, 0, -1)$
(Rque : On peut facilement vérifier que ce sont les bonnes coordonnées en s'assurant que $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$)

Exercice 12 (Étude d'un sous espace vectoriel)

1. $E = \mathrm{Vect}\left(I_3, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$ donc E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
2. On montrerait facilement que toute combinaison linéaire nulle d'éléments de la famille $\left(I_3, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$ est en réalité la combinaison linéaire triviale, ce qui signifie que la famille $\left(I_3, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$ est libre. Puisque c'est une famille de 3 éléments qui engendre E, il s'agit d'une base de E, qui est donc un espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ de dimension 3.
En remarquant que $J^2 = J$, la famille $\mathscr{B}$ de l'énoncé est bien la famille $\left(I_3, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$.
3. On remarque que $J^3 = I_3$. Par récurrence immédiate, on peut montrer que $J^{3n} = I_n$, $J^{3n+1} = J$ et $J^{3n+2} = J^2$ pour tout $n \in N$.
4. $\forall (M, M') \in E^2$, montrons que $MM' \in E$.
Dire que M est dans E signifie qu'il existe trois réels (a, b, c) tels que $M = aI_3 + bJ + cJ^2$
Dire que M' est dans E signifie qu'il existe trois réels (a', b', c') tels que $M = a'I_3 + b'J + c'J^2$
On peut alors calculer

$$\begin{aligned} MM' &= (aI_3 + bJ + cJ^2)(a'I_3 + b'J + c'J^2) \\ &= aa'I_3 + ab'J + ac'J^2 + ba'J + bb'J^2 + bc'J^3 + ca'J^2 + cb'J^3 + cc'J^4 \\ &= aa'I_3 + ab'J + ac'J^2 + ba'J + bb'J^2 + bc'I_3 + ca'J^2 + cb'I_3 + cc'J \qquad \text{car} J^3 = I_3 et J^4 = J \\ &= (aa' + bc' + cb')I_3 + (ab' + ba' + cc')J + (ac' + bb' + ca')J^2 \end{aligned}$$

Donc MM' peut s'exprimer comme une combinaison linéaire de I_3, J et J^2, c'est donc un élément de E et on a donc prouvé que l'espace vectoriel E est stable par multiplication.

Exercice tiré d'annales : d'après Ecricome 2008

les cubes pourront travailler sur l'énoncé original glané sur le web

1. $E = \{M(a,b),\ a, b \in \mathbb{R}\} = \left\{ a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right\} = \mathrm{Vect}(I, A)$, donc E est bien un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
On aurait aussi pu utiliser la méthode "classique" consistant à vérifier que E est inclus dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, qu'il contient la matrice nulle $M(0,0)$, et qu'il est stable par combinaison linéaires, mais c'est beaucoup plus long, et maladroit au vu de la deuxième question...
2. La famille (I, A) est génératrice de E (car $E = \mathrm{Vect}(I, A)$) et libre (car aucune des deux matrices n'est multiple de l'autre), c'est donc une base de E, qui est donc de dimension 2.
*l'argument utilisé ici pour obtenir la liberté n'est valable que pour les familles composées de **deux** vecteurs.*
3. Appelons E_1 l'ensemble des solutions de l'équation $AX = X$.

$$X \in E_1 \Leftrightarrow AX = X \Leftrightarrow (A - I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - y - 2z = 0 \\ 2x - 2y - 4z = 0 \\ -x + y + 2z = 0 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1; L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x - y - 2z = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y + 2z.$$

D'où $E_1=\left\{\begin{pmatrix}y+2z\\y\\z\end{pmatrix},\ y,z\in\mathbb{R}\right\}=\boxed{\text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\right).}$

E_1 est donc de dimension 2 car les deux vecteurs mis en évidence engendrant cet espace vectoriel forment une famille libre parce qu'ils ne sont pas colinéaires.

4. Appelons E_2 l'ensemble des solutions de l'équation $AX=2X$ ou de manière équivalente $(A-2I)X=0$.

$$(A-2I)X=0\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{cccc} & -y & -2z & =0\\ 2x & -3y & -4z & =0\\ -x & +y & +z & =0\end{array}\right. \underset{L_2\leftarrow L_2-3L_1;L_3\leftarrow L_3+L_1}{\Leftrightarrow}\left\{\begin{array}{cccc} -y & & -2z & =0\\ & 2x & +2z & =0\\ & -x & -z & =0\end{array}\right.$$

$$\underset{L_3\leftarrow 2L_3+L_2}{\Leftrightarrow}\left\{\begin{array}{cccc} -y & & -2z & =0\\ & 2x & +2z & =0\\ & & 0 & =0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} y=-2z\\ x=-z\end{array}\right.$$

D'où $E_2=\left\{\begin{pmatrix}-z\\-2z\\z\end{pmatrix},\ z\in\mathbb{R}\right\}=\boxed{\text{Vect}\left(\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}\right).}$ E_2 est donc de dimension 1.

5. *P est la matrice de passage de la base canonique à la base des vecteurs mis en évidence dans les deux précédentes questions (que l'on apellera vecteurs propres plus tard dans l'année)*

On peut à la fois montrer que P est inversible et calculer P^{-1} en utilisant la méthode du pivot de Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&2&1&0&0\\2&1&0&0&1&0\\-1&0&1&0&0&1\end{array}\right)\quad \begin{array}{c}L_2\to L_2-2L_1\\L_3\to L_3+L_1\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&2&1&0&0\\0&-1&-4&-2&1&0\\0&1&3&1&0&1\end{array}\right)\quad L_2\to -L_2\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&2&1&0&0\\0&1&4&2&-1&0\\0&1&3&1&0&1\end{array}\right)$$

$$L_3\to L_3+L_2\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&2&1&0&0\\0&1&4&2&-1&0\\0&0&-1&-1&1&1\end{array}\right)\quad L_3\to -L_3\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&2&1&0&0\\0&1&4&2&-1&0\\0&0&1&1&-1&-1\end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c}L_1\to L_1-2L_3\\L_2\to L_2-4L_3\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&-1&2&2\\0&1&0&-2&3&4\\0&0&1&1&-1&-1\end{array}\right)\quad L_1\to L_1-L_2\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&-1&-2\\0&1&0&-2&3&4\\0&0&1&1&-1&-1\end{array}\right)$$

$$\boxed{P^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&-2\\-2&3&4\\1&-1&-1\end{pmatrix}}$$

et un calcul simple nous permet de constater que $D=P^{-1}AP$

6. Comme $M(a,b)=aI+bA$,
$D(a,b)=P^{-1}M(a,b)P=P^{-1}(aI+bA)P=P^{-1}(aI)P+P^{-1}(bA)P=aI+bD=Diag(a+2b,a+b,a+b)$ est bien diagonale.

7. • Supposons que $M(a,b)$ est inversible. Alors $D(a,b)=P^{-1}M(a,b)P$ est inversible comme produit de matrices inversibles. Réciproquement, Si $D(a,b)$ est inversible, on écrit $M(a,b)=Pd(a,b)P^{-1}$ en multipliant l'égalité précédente par P à Gauche et par P^{-1} à droite. Ainsi, $M(a,b)$ est inversible comme produit de matrices inversibles.

Par suite, $\boxed{M(a,b)\text{ est inversible si et seulement si }D(a,b)\text{ est inversible.}}$

• Or, $D(a,b)=Diag(a+2b,a+b,a+b)$ est inversible si et seulement si $a+2b\neq 0$ et $a+b\neq 0$, car $D(a,b)$ est une matrice diagonale (*et une matrice diagonale (ou triangulaire) est inversible si et seulement si ses éléments diagonaux sont non nuls*).

$$\text{D'où}\quad\boxed{M(a,b)\text{ inversible }\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}a+2b\neq 0\\ \text{et}\\ a+b\neq 0\end{array}\right.}$$

8. $M(a,b)^2=I\Leftrightarrow P^{-1}M(a,b)^2P=P^{-1}IP\Leftrightarrow P^{-1}M(a,b)\underbrace{PP^{-1}}_{=I}M(a,b)P=I\Leftrightarrow D(a,b)^2=I.$

Or, $D(a,b)^2=I\Leftrightarrow Diag((a+2b)^2,(a+b)^2,(a+b)^2)=I\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}(a+2b)^2=1\\(a+b)^2=1\end{array}\right.$

Enfin, $\left\{\begin{array}{l}(a+2b)^2=1\\(a+b)^2=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}a+2b=\pm1\\a+b=\pm1\end{array}\right.$, et, en résolvant chacun des quatre systèmes obtenus (en prenant les différentes valeurs possibles pour ±1 sur chacune des deux lignes), on obtient quatre couples-solutions :

$$(1,0),\quad (-1,0),\quad (-3,2)\ \text{ et }\ (3,-2).$$

Les solutions de $M(a,b)^2=I$ sont donc

$$\boxed{M(1,0),\quad M(-1,0),\quad M(-3,2)\ \text{ et }\ M(3,-2).}$$