Fonctions

Exercices d'application directe du cours ou exercices classiques

Exercice 1 (Obtention d'inégalités)

1. Montrer que : $\forall x \geq 0, \quad x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(x+1) \leq x$
2. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad x - 1 \leq x \ln x$

Exercice 2 (Deux fonctions classiques)

On considère les fonctions ch et sh définies sur $\mathbb{R}$ par $\text{ch}\, x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $\text{sh}\, x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

1. Déterminer la parité de chacune de ces fonctions.
2. Déterminer le signe de chacune de ces fonctions sur $\mathbb{R}$.
3. Étudier le sens de variation de chacune de ces fonctions sur $\mathbb{R}$.
4. Déterminer les tangentes en 0 aux courbes de chacune de ces fonctions.
5. Etudier la convexité de ces fonctions.
6. Tracer les représentations graphiques de ces fonctions.

Exercice 3 (Calculs de limites)

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x+1}$
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x+5} - \sqrt{x-3}$
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 1}$
5. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 1}$
6. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 1}$
7. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{2x} - 2}{x - 2}$
8. $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{(6-x)^7 - 1}{x - 5}$
9. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$

Exercice 4 (Prolongements par continuité)

Justifier la continuité des fonctions f suivantes sur I et montrer qu'elles admettent un prolongement par continuité sur J :

1. $f(x) = \dfrac{e^{x^2} - 1}{x^2} \qquad I = \mathbb{R}^* \quad J = \mathbb{R}$
2. $f(x) = \dfrac{\ln(1+2x)}{x} \qquad I =]0; +\infty[\quad J = [0; +\infty[$
3. $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^2 + 2x - 3} \qquad I =]-3; 1[\cup]1; +\infty[\quad J =]-3; +\infty[$
4. $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x} - 2}{\sqrt{x+7} - 3} \qquad I = [0; 2[\cup]2; +\infty[\quad J = \mathbb{R}^+$

Exercice 5 (Bijections réciproques)

1. Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x+1}$. Montrer que f réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur un intervalle à préciser et déterminer l'expression de sa bijection réciproque.
2. Soit g la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + 2}$. Montrer que g réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur un intervalle à préciser et déterminer une expression de sa bijection réciproque.

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} x e^{-1/x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

1. f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer sa dérivée.
3. f est-elle dérivable sur $[0; +\infty[$?

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+\star}$ par $f(x) = 1 + x - x \ln x$. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}^{+\star}$, puis montrer que celle-ci appartient à $[1; 4]$ (On donne $\ln 4 \simeq 1.4$).

Exercice 8

Étudier la convexité de la fonction $f : x \mapsto e^{-x^2}$. Préciser les points d'inflexion de la courbe

Exercice 9

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = x^n + x - 1$. Montrer qu'il existe un unique réel $x \in]0; 1[$ tel que $f_n(x) = 0$.

Exercices d'approfondissement

Exercice 10 (Obtention d'inégalités)

1. Pour tous réels positifs a et b, Comparer $(a+b)^3$ et $4(a^3+b^3)$
2. Pour tous réels positifs a et b, Comparer $\sqrt[3]{a^2b}$ et $\frac{2a+b}{3}$

Exercice 11 (Calculs de limites)

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{4x^2+x+1}-2x$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{9x^2-x+1}-5x$
3. $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{x^2+1-\ln x}{e^x-1}$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x)^{\frac{1}{\ln x}}$

Exercice 12 (erreur commise)

Donner le meilleur majorant possible de l'erreur commise en disant que $\sqrt{10001} \simeq 100$
Indication : on utilisera astucieusement l'inégalité des accroissements finis

Exercice 13

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{e^{2x}+1}$.

1. **a.** Montrer que f est paire. Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative dans un repère orthogonal (unités : 2 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées).
   b. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution ℓ (on pourra étudier $g : x \mapsto f(x)-x$).
   Justifier que $0 \leqslant \ell \leqslant \frac{1}{2}$ (on donne $f(1/2) < 1/2$).
   c. Montrer que, pour tout réel x, $|f'(x)| \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{2}$.
2. On définit la suite (u_n) par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.
   a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1}-\ell| \leqslant \frac{1}{2}|u_n-\ell|$. (On pourra utiliser l'inégalité des accroissements finis.)
   b. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n-\ell| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}$.
   c. En déduire que la suite (u_n) converge vers ℓ.
   d. Écrire un script Python permettant d'obtenir une valeur approchée de ℓ à 10^{-3} près.

Exercices tirés d'annales

Exercice 14 (d'après EDHEC 2008)

Pour tout entier naturel n non nul, on définit la fonction f_n par $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \dfrac{1}{1+e^x} + nx$.
On appelle (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O\ ;\vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité 5 cm.

1. **a.** Déterminer, pour tout réel x, $f_n'(x)$ et $f_n''(x)$.
   b. En déduire que la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. **a.** Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x)$ ainsi que $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$.
   b. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} (f_n(x)-nx)$.
   Donner une interprétation graphique du résultat concernant le lien entre la droite (D_n) d'équation $y = nx$ et la courbe (C_n) (plus trop au programme mais intéressant quand même)
   De même, Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} (f_n(x)-nx-1)$ et donner une interprétation graphique du résultat concernant le lien entre la droite (D_n') d'équation $y = nx+1$ et la courbe (C_n). (idem)
   c. Déterminer les coordonnées du seul point d'inflexion, noté A_n de (C_n).
   d. Donner l'équation de la tangente (T_1) à la courbe (C_1) en A_1, puis tracer sur un même dessin la droite (T_1) ainsi que l'allure de la courbe (C_1).
3. **a.** Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ possède une seule solution sur $\mathbb{R}$, notée u_n.
   b. Montrer que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \frac{-1}{n} < u_n < 0$.
   c. En déduire la limite de la suite (u_n).
   d. En revenant à la définition de u_n, montrer que $(-2n)u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
   e. *Pour les cubes, donner un équivalent de la suite (u_n) au voisinage de $+\infty$.*