# Correction - Fonctions

## Exercices d'application directe du cours ou exercices classiques

### Exercice 1 (Obtention d'inégalités)

**1.** Montrer que : $\forall x \geq 0,\ x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(x+1) \leq x$

L'inégalité de droite a été démontrée en classe.
Soit $\psi$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $\psi(x) = x - \frac{x^2}{2} - \ln(x+1)$

Si l'objet d'une question entière est de justifier la dérivabilité de ce genre de fonction, voici comment il faudrait rédiger (en place du traditionnel "par opération sur les fonctions usuelles") :
- $x \mapsto x+1$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et à valeurs dans $[1;+\infty[$ en tant que fonction polynôme.
- la fonction logarithme népérien est dérivable sur $[1;+\infty[$
- Donc, par composition, la fonction $x \mapsto \ln(x+1)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$.
- Comme de plus la fonction $x \mapsto x - \frac{x^2}{2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ en tant que fonction polynôme,
- Donc par somme, la fonction $\psi$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \psi'(x) = 1 - x - \frac{1}{x+1} = \cdots = \frac{-x^2}{x+1}$
Un tableau de signe de $\psi'(x)$ suivi d'un tableau de variations de $\psi$ (laissés au lecteur) nous prouve que $\psi$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
Or $\psi(0) = 0 - \ln(1) = 0$. Il s'agit donc du maximum de $\psi$ sur $R_+$, ce qui signifie que $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \psi(x) \leq 0$

C'est-à-dire que $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(x+1)}$.

**2.** Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad x - 1 \leq x \ln x$

Même méthode que ci-dessus (avec une justification de la dérivée beaucoup plus aisée puisque la fonction auxiliaire n'est pas une composée).
Si on se souvient que $\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$, on trouve facilement que la fonction auxiliaire introduite présente un maximum en 1 qui vaut 0, ce qui prouve le résultat voulu.

### Exercice 2 (Deux fonctions classiques)

On considère les fonctions ch et sh définies sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{ch}x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $\mathrm{sh}x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

**1.** Déterminer la parité de chacune de ces fonctions.
$\forall x \in \mathbb{R},\ -x \in \mathbb{R}$, et $\mathrm{ch}(-x) = \dfrac{e^{-x} + e^x}{2} = \mathrm{ch}x \qquad \mathrm{sh}(-x) = \dfrac{e^{-x} - e^x}{2} = -\mathrm{sh}x$
ch est donc une fonction paire et sh une fonction impaire.

**2.** Déterminer le signe de chacune de ces fonctions sur $\mathbb{R}$.

- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{ch}x > 0$ comme somme de deux exponentielles.
- $\forall x \geq 0, \quad x \geq -x$ et donc par croissance de l'exponentielle, $e^x \geq e^{-x}$ donc $e^x - e^{-x} \geq 0$ , d'où $\mathrm{sh}x \geq 0$
  On montrerait de la même manière que $\forall x \leq 0, \quad \mathrm{sh}x \leq 0$

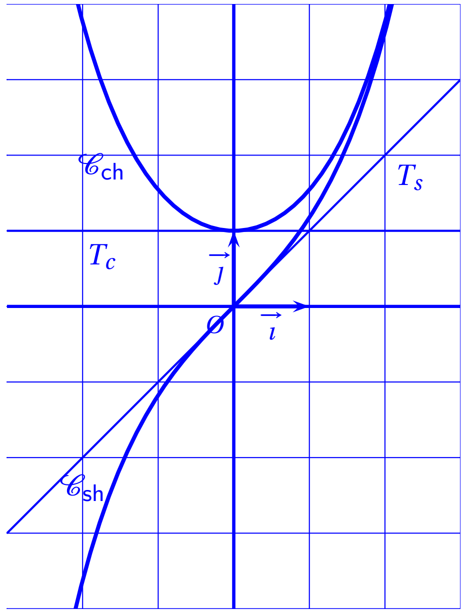
**3.** Étudier le sens de variation de chacune de ces fonctions sur $\mathbb{R}$.
Ces deux fonctions sont deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ par opération sur les fonctions usuelles.
$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{ch}'x = \mathrm{sh}x$ et $\mathrm{sh}'x = \mathrm{ch}(x)$.
Comme on a étudié le signe de ces deux fonctions dans la question précédente, on en déduit que :

- ch est une fonction décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$
- sh est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$.

**4.** Déterminer les tangentes en 0 aux courbes de chacune de ces fonctions. Puisque $\mathrm{ch}0 = 1$ et $\mathrm{sh}0 = 0$, et en appelant $T_c$ la tangente à la courbe de ch en 0 et $T_s$ la tangente à la courbe de sh en 0 , il vient :
$T_c \ : \ y = 1$ et $T_s \ : \ y = x$

**5.** Etudier la convexité de ces fonctions.
ch et sh étant deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{ch}''(x) = \mathrm{ch}x > 0$ et $\mathrm{sh}''(x) = \mathrm{sh}x$ du même signe que $x$ (d'après 2.)
Il vient que la fonction ch est convexe sur $\mathbb{R}$ et que la fonction sh est concave sur $\mathbb{R}_-$ et convexe sur $\mathbb{R}_+$. Sa courbe admet un point d'inflexion en 0.

**6.** Tracer les représentations graphiques de ces fonctions.




## Exercice 3 (Calculs de limites)

Déterminer les limites suivantes :

**1.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$

$\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right) = \ln\left(\dfrac{1}{1+\frac{1}{x}}\right)$ or $\dfrac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = \ln(1) = 0$

**2.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x+1}$

$\dfrac{\ln x}{x+1} = \dfrac{\ln x}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \dfrac{\ln x}{x} \times \dfrac{1}{1+\frac{1}{x}}$ Donc, par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x+1} = 0 \times 1 = 0$

**3.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+5} - \sqrt{x-3}$

au voisinage de $+\infty$, $\sqrt{x+5} - \sqrt{x-3} = \dfrac{\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}\right)\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3}\right)}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3}} = \dfrac{x+5-(x-3)}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3}} = \dfrac{8}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3}}$

Or $\sqrt{x+5} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $\sqrt{x-3} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+5} - \sqrt{x-3} = 0$

**4.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-5x+4}{x^2-1}$

- Première rédaction possible :

la limite en l'infini d'une fonction rationnelle est égale à la limite du quotient simplifié de ses termes de plus au degré.

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-5x+4}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{1} = 1$

- Deuxième rédaction possible :

$\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-1} = \dfrac{x^2\left(1-\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} = \dfrac{1-\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}}$ de plus, $1-\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et $1-\frac{1}{x^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-5x+4}{x^2-1} = 1$

**5.** $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x^2-5x+4}{x^2-1}$

$\lim\limits_{x\to-1} x^2-5x+4 = 10 > 0$ et de plus

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2-1$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Donc $\lim\limits_{x\to-1^-} x^2-1 = 0^+$ et par suite $\lim\limits_{x\to-1^-} \dfrac{x^2-5x+4}{x^2-1} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-1^+} x^2-1 = 0^-$ et par suite $\lim\limits_{x\to-1^+} \dfrac{x^2-5x+4}{x^2-1} = -\infty$

**6.** $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^2-5x+4}{x^2-1}$

$\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-1} = \dfrac{(x-1)(x-4)}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{x-4}{x+1}$ donc $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^2-5x+4}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{x-4}{x+1} = -\dfrac{3}{2}$

On donne les réponses brutes pour les trois dernières questions, pas de nouvelles rédaction-type dans ces items.

7. $\lim_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{2x}-2}{x-2} = \frac{1}{2}$

8. $\lim_{x\to 5} \dfrac{(6-x)^7-1}{x-5} = -7\times 5^6$

9. $\lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$

## Exercice 4 (Prolongements par continuité)

Justifier la continuité des fonctions $f$ suivantes sur $I$ et montrer qu'elles admettent un prolongement par continuité sur $J$ :
Réponses brutes ou très elliptiques :

1. $f(x) = \dfrac{e^{x^2}-1}{x^2}$ $\quad I = \mathbb{R}^* \quad J = \mathbb{R}$
   on pose $f(0) = 1$.

2. $f(x) = \dfrac{\ln(1+2x)}{x}$ $\quad I = ]0;+\infty[ \quad J = [0;+\infty[$
   On pose $f(0) = 2$

3. $f(x) = \dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^2+2x-3}$ $\quad I = ]-3;1[\cup]1;+\infty[ \quad J = ]-3;+\infty[$
   On pose $f(1) = 0$

4. $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x}-2}{\sqrt{x+7}-3}$ $\quad I = [0;2[\cup]2;+\infty[ \quad J = \mathbb{R}^+$
   $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x}-2}{\sqrt{x+7}-3} = \underbrace{\dfrac{\sqrt{2x}-2}{x-2}}_{\underset{x\to 2}{\longrightarrow}\varphi'(2)} \times = \underbrace{\dfrac{x-2}{\sqrt{x+7}-3}}_{\underset{x\to 2}{\longrightarrow}\frac{1}{\psi'(2)}}$ (avec $\varphi(x) = \sqrt{2x}$ et $\psi(x) = \sqrt{x+7}$)
   donc on pose $f(1) = 3$

## Exercice 5 (Bijections réciproques)

1. Soit $f$ la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x+1}$. Montrer que $f$ réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur un intervalle à préciser et déterminer l'expression de sa bijection réciproque.

   $f$ est dérivable sur $[0,+\infty[$ comme inverse d'une fonction dérivable ne s'annulant pas sur $[0,+\infty[$.
   $\forall x \geq 0, \quad f'(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^2} < 0$ $\qquad$ donc $f$ est strictement décroissante sur $[0,+\infty[$
   De plus, $\quad f(0) = 1 \quad$ et $\quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

   Donc $f$ est continue sur $[0,+\infty[$ (car dérivable) et strictement décroissante sur $[0,+\infty[$ avec $f\big([0,+\infty[\big) = ]0.1]$.
   Donc $f$ réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $]0;1]$.
   Ce qui signifie que pour tout $y$ de $]0.1]$, il existe un unique $x$ de $[0,+\infty[$ tel que $y = f(x)$
   c'est-à-dire $y = \frac{1}{x+1} \Leftrightarrow y(x+1) = 1 \Leftrightarrow xy + y = 1 \Leftrightarrow xy = 1-y \Leftrightarrow x = \frac{1-y}{y}$.
   La fonction réciproque de $f$ est donc la fonction $f^{-1}$ définie sur $]0;1]$ par $f^{-1}(t) = \dfrac{1-t}{t}$

2. Soit $g$ la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{x^2-2x+2}$. Montrer que $g$ réalise une bijection de $[1,+\infty[$ sur un intervalle à préciser et déterminer une expression de sa bijection réciproque.

   On montre comme dans l'item précédent que $g$ réalise une bijection de $[1,+\infty[$ sur $]0;1]$.
   Les calculs sont simplifiés en exprimant $g(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2+1}$ et on trouve que $g^{-1}$ est la fonction définie sur $]0;1]$ par : $g^{-1}(t) = \sqrt{\frac{1-t}{t}} + 1$ On trouve

## Exercice 6

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} xe^{-1/x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

1. $f$ est-elle continue sur $\mathbb{R}$ ?
2. Montrer que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer sa dérivée.
3. $f$ est-elle dérivable sur $[0;+\infty[$ ?

### Exercice 7
Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+\star}$ par $f(x) = 1 + x - x\ln x$. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}^{+\star}$, puis montrer que celle-ci appartient à $[1;4]$ (On donne $\ln 4 \simeq 1.4$).

### Exercice 8
Étudier la convexité de la fonction $f : x \mapsto e^{-x^2}$. Préciser les points d'inflexion de la courbe.

La fonction $f$ est convexe sur $]-\infty; -\frac{\sqrt{2}}{2}[$ et sur $]\frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty[$ et concave sur $]-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}[$.

Les points d'inflexion de la courbe se situent en $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

### Exercice 9
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = x^n + x - 1$. Montrer qu'il existe un unique réel $x \in ]0;1[$ tel que $f_n(x) = 0$.

## Exercices d'approfondissement

### Exercice 10 (Obtention d'inégalités)
1. Pour tous réels positifs $a$ et $b$, Comparer $(a+b)^3$ et $4(a^3+b^3)$
2. Pour tous réels positifs $a$ et $b$, Comparer $\sqrt[3]{a^2b}$ et $\frac{2a+b}{3}$

### Exercice 11 (Calculs de limites)
1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{4x^2+x+1} - 2x$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{9x^2-x+1} - 5x$
3. $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{x^2+1-\ln x}{e^x-1}$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x)^{\frac{1}{\ln x}}$

### Exercice 12 (erreur commise)
Donner le meilleur majorant possible de l'erreur commise en disant que $\sqrt{10001} \simeq 100$

*Indication : on utilisera astucieusement l'inégalité des accroissements finis*

### Exercice 13
Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{e^{2x}+1}$.

1. **a.** Montrer que $f$ est paire. Étudier les variations de $f$ et tracer sa courbe représentative dans un repère orthogonal (unités : 2 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées).

   **b.** Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution $\ell$ (on pourra étudier $g : x \mapsto f(x) - x$). Justifier que $0 \leqslant \ell \leqslant \frac{1}{2}$ (on donne $f(1/2) < 1/2$).

   **c.** Montrer que, pour tout réel $x$, $|f'(x)| \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{2}$.
2. On définit la suite $(u_n)$ par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

   **a.** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \ell| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \ell|$. (On pourra utiliser l'inégalité des accroissements finis.)

   **b.** En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \ell| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}$.

   **c.** En déduire que la suite $(u_n)$ converge vers $\ell$.

   **d.** Écrire un script Python permettant d'obtenir une valeur approchée de $\ell$ à $10^{-3}$ près.

## Exercices tirés d'annales

### Exercice 14 (d'après EDHEC 2008)
1. **a.** $f_n$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ par opérations sur les fonctions usuelles et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $f_n'(x) = -\frac{e^x}{(1+e^x)^2} + n$ et $f_n''(x) = -\frac{e^x(1+e^x)^2 - 2e^x(1+e^x)e^x}{(1+e^x)^4} = \frac{e^x(e^x-1)}{(1+e^x)^3}$.

   **b.** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 < e^x < e^x + 1$, donc $0 < \frac{e^x}{e^x+1} < 1$, et, comme $e^x + 1 > 1$, on a aussi $0 < \frac{e^x}{(e^x+1)^2} < 1$.
   On a donc $n - 1 < f_n'(x) < n$, et, comme $n \geq 1$, on a $f_n'(x) > 0$.
   $f_n$ est donc bien strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. **a.** $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{1+e^x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} nx = -\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x) = -\infty$.
   $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{1+e^x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} nx = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$.

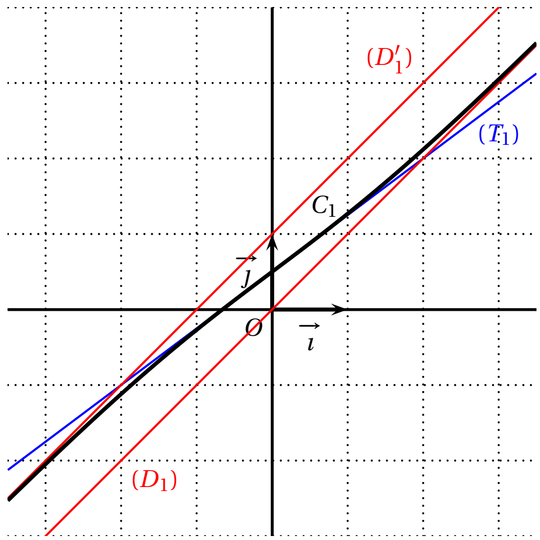
**b.** $\lim_{x\to-\infty} f_n(x) - nx = 1$, donc la droite $(D'_n)$ d'équation $y = nx+1$ est asymptote oblique à $C_n$ au voisinage de $-\infty$.
$\lim_{x\to+\infty} f_n(x) - nx = 0$, donc la droite $(D_n)$ d'équation $y = nx$ est asymptote oblique à $C_n$ au voisinage de $+\infty$.

**c.** Étudions pour cela le signe de $f''_n(x)$.
Le signe de $f''_n(x)$ ne dépend que de $e^x - 1$.
Par suite, on a :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''_n(x)$ | | - | $0$ | $+$ | |

Par suite, $C_n$ admet un point d'inflexion en $(0, f_n(0)) = (0, 1/2)$.

**d.** La tangente $(T_1)$ à la courbe $(C_1)$ en $A_1(0, 1/2)$ a pour équation : $y = f'_1(0)(x-0) + f(0) \Leftrightarrow y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$.




**3.** **a.** $f_n$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ avec $\lim_{x\to-\infty} f_n(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$
Elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
Or $0 \in \mathbb{R}$, donc l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$, notée $u_n$.

**b.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{1+e^{-1/n}} - 1 = -\frac{e^{-1/n}}{1+e^{-1/n}} < 0$ et $f_n(0) = \frac{1}{2} > 0$.
Par suite, comme $f_n(u_n) = 0$, on a $f_n(-\frac{1}{n}) < f_n(u_n) < f_n(0)$, et,
comme $f_n$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on a $-\frac{1}{n} < u_n < 0$.

**c.** D'après le théorème des gendarmes, comme $\lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{n} = 0$, on a aussi $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

**d.** Par définition de $u_n$, on a $f_n(u_n) = 0$, donc $nu_n = -\frac{1}{1+e^{u_n}}$ et par suite $-2nu_n = \dfrac{2}{1+e^{u_n}}$
D'où, comme $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$, on a $\lim_{n\to+\infty} 1 + e^{u_n} = 2$ et donc $\lim_{n\to+\infty} -2nu_n = 1$.

**e.** Par suite, on a $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{-\frac{1}{2n}} = \lim_{n\to+\infty} -2nu_n = 1$, donc $u_n \sim -\frac{1}{2n}$.