Suites

Exercices d'application directe du cours et incontournables

Exercice 1 (Suites usuelles)

Dans chaque cas, calculer le terme général de la suite (u_n) et $\sum_{k=7}^{n} u_k$.

1. $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 4\,u_n$.
2. $u_2 = 5$ et $\forall n \geq 2,\ u_{n+1} = \frac{2}{5}\,u_n$.
3. $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + 2$.
4. $u_7 = 5$ et $\forall n \geq 7,\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{3}$.
5. $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 4\,u_n + 3$.
6. $u_3 = 2$ et $\forall n \geq 3,\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\,u_n + \frac{3}{4}$.
7. $u_0 = 2,\ u_1 = 7$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2\,u_{n+1} - u_n$.
8. $u_3 = 2,\ u_4 = 7$ et $\forall n \geq 3,\ u_{n+2} = 3\,u_{n+1} - 2\,u_n$.

Dans les deux dernières situations, écrire un script python permettant de calculer et afficher le terme de rang $n \geq 2$ de la suite, ne connaissant que sa définition par récurrence.
Pour les plus ambitieux : écrire un script python permettant de vérifier, pour $n \geq 2$ que la formule explicite fonctionne.

Exercice 2 (Suites géométriques)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites définies pour tout $n \geq n$ par : $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}(2u_n + v_n)$ et $v_{n+1} = \dfrac{1}{3}(u_n + 2v_n)$.

1. Donner un script python permettant de calculer et imprimer le terme de rang n des suites u_n et v_n lorsque $u_0 = 0$ et $v_0 = 1$.
2. On pose $t_n = u_n - v_n$ et $s_n = u_n + v_n$. Montrer que (t_n) et (s_n) sont des suites géométriques (ou mieux !). En déduire l'expression de t_n (resp. s_n) en fonction de t_0 (resp s_0).
3. En déduire l'expression de u_n et v_n en fonction de n, u_0 et v_0.
4. Déterminer la limite de (u_n) et (v_n).

Exercice 3 (Sommes de termes successifs de suites arithmétique ou géométrique)

1. Calculer la somme des n premiers entiers pairs et celle des n premiers entiers impairs.
2. Calculer $S_n = 1 - 2 + 2^2 - 2^3 + \cdots + (-1)^n 2^n$.

Exercice 4 (Recherche de limites)

Déterminer, si elle existe, la limite de chacune des suites suivantes :

1. $u_n = \frac{n^3-3}{2n^2+1}$
2. $u_n = \frac{2^n-3^n}{2^n+3^n}$
3. $u_n = \frac{1}{n}\ln\frac{1}{n}$
4. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
5. $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ (utiliser une relation du type $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$)
6. $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$ (encadrer u_n aussi simplement que possible)

Exercice 5 (Étude classique d'une suite du type $u_{n+1} = f(u_n)$)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$

1. Montrer que u_n est bien défini et strictement positif pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Écrire un script Python permettant de calculer et afficher le terme de rang n de la suite.
3. Quelles sont les limites possibles pour (u_n) ?
4. Étudier le sens de variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \sqrt{x+2}$.
5. Conclure quand à la convergence de (u_n).

Exercice 6 (Étude avec IAF d'une suite du type $u_{n+1} = f(u_n)$)

On considère dans cet exercice la fonction f définie pour $x \geq 0$ par $f(x) = \frac{1}{x+1}$

1. Montrer que l'équation $x^2 + x - 1 = 0$ a une seule racine réelle appartenant à $]0,1[$, et préciser la valeur de cette racine r_2.
2. Montrer, si x désigne un nombre réel appartenant à $[1/2,1]$, que $f(x)$ appartient à $[1/2,1]$.
3. Calculer la dérivée f' de f et prouver l'inégalité suivante pour $1/2 \leq x \leq 1$: $\left|f'(x)\right| \leq \frac{4}{9}$
4. On considère la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
   Prouver l'inégalité suivante et la convergence de la suite (u_n) vers r_2 : $\forall n \in \mathbb{N},\quad |u_n - r_2| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n$
5. Donner un script python permettant de calculer et imprimer une valeur approchée à ε près de r_2.

Exercice 7 (Étude classique des suites d'une suite du type $u_{n+1} = f(u_n)$ (cas f décroissante))

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 1 + \frac{2}{u_n}$

1. Montrer que u_n est bien défini et strictement positif pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Quelles sont les limites possibles pour (u_n) ?
3. Étudier le sens de variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = 1 + \frac{2}{x}$.
4. On pose $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Étudier la convergence de (v_n) et (w_n) (on montrera que $v_{n+1} = f \circ f(v_n)$ et $w_{n+1} = f \circ f(w_n)$)
5. Conclure quant à la convergence de la suite (u_n).

Exercice 8 (Étude classique des suites d'une suite du type $u_{n+1} = f(u_n)$)

On considère la suite définie par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}$ fixé et de la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f : x \mapsto \frac{x^3+6x}{3x^2+2}$

1. Déterminer le tableau de variations de f.
2. Étudier le signe de $f(x) - x$. En déduire les points fixes de f.
3. Que dire de la suite dans le cas où $u_0 = 0$? Où $u_0 = -\sqrt{2}$? Où $u_0 = \sqrt{2}$?
4. On suppose dans cette question que $u_0 \in]0; \sqrt{2}[$.
   a. Montrer que pour tout n, $u_n \in]0; \sqrt{2}[$.
   b. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
   c. Conclure quant à la convergence de la suite (u_n).
5. Reprendre l'étude de la question précédente dans le cas où $u_n \in]\sqrt{2}; +\infty[$, puis dans le cas où $u_0 < 0$

Exercices d'approfondissement

Exercice 9 (Suite récurrente linéaire double "détournée")

On considère la suite définie par la donnée de $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et la relation de récurrence $u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1} u_n}$

1. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.
2. Proposer un programme Python permettant de déterminer le k-ième terme de la suite (u_n), l'entier k étant saisi par l'utilisateur.

Exercice 10 (Suite récurrente linéaire double "détournée")

On considère la suite définie par la donnée de $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et la relation de récurrence $u_{n+2} = \dfrac{u_{n+1}^2}{u_n}$

1. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.
2. Proposer un programme Python permettant de déterminer le k-ième terme de la suite (u_n), l'entier k étant saisi par l'utilisateur.

Exercice 11 (Suite définie par un produit)

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \prod_{k=1}^{n} (1 + \frac{k}{n^2})$.

1. Montrer que pour tout réel x strictement positif, on a $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.
2. En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 12 (du type $u_{n+1} = f_n(u_n)$)

Étudier la suite définie par $u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \dfrac{e^{-u_n}}{n}$.

Exercice 13 (du type $f(u_n) = n$)

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $e^x + x - n = 0$ a une unique solution, que l'on notera u_n. (On pourra étudier $x \mapsto e^x + x$)
2. Étudier le sens de variations de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ ainsi définie.
3. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $u_n \leq \ln n$ puis que $u_n \geq \ln(n) - 1$ pour n assez grand. (On pourra comparer $f(u_n)$ et $f(\ln(n) - 1)$).
4. En déduire un équivalent simple de (u_n) lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 14 (du type $f_n(u_n) = 0$)

On note, pour tout $n \geq 1$, a_n la solution de l'équation $\sum_{k=1}^{n} x^k = 1$ appartenant à l'intervalle $[0, 1]$

1. Montrer que a_n est bien défini pour tout n. (On pourra introduire $P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k$ et étudier son sens de variations sur $[0, 1]$.)
2. Calculer a_0 et a_1.
3. Montrer que la suite (a_n) est monotone. (On pourra comparer $P_{n+1}(a_n)$ et $P_{n+1}(a_{n+1})$)
4. Montrer que la suite (a_n) est convergente.
5. Montrer que pour tout $n \geq 2$, on a $0 < a_n \leq a_2 < 1$.
6. En déduire la limite de la suite (a_n).

Exercice 15

Exercice 13 de la fiche du TD2 sur les fonctions.