Suites - Corrigé

Exercices d'application directe du cours et incontournables

Exercice 1 (Suites usuelles)

Dans chaque cas, calculer le terme général de la suite (u_n) et $\sum_{k=7}^{n} u_k$. Réponses brutes :

1. $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 4\,u_n$. $\qquad u_n = 3\times 4^n \qquad \sum_{k=7}^{n} u_k = 4^7(4^{n-6}-1)$
2. $u_2 = 5$ et $\forall n \geq 2,\ u_{n+1} = \frac{2}{5}\,u_n$. $\qquad u_n = \dfrac{2^{n-2}}{5^{n-3}} \qquad \sum_{k=7}^{n} u_k = \frac{2^5}{3\times 5^3}\left(1-(\frac{2}{5})^{n-6}\right)$
3. $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + 2$. $\qquad u_n = 3+2n \qquad \sum_{k=7}^{n} u_k = (n+10)(n-6)$
4. $u_7 = 5$ et $\forall n \geq 7,\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{3}$. $\qquad u_n = \dfrac{n+8}{3} \qquad \sum_{k=7}^{n} u_k = \frac{1}{6}(23+n)(n-6)$
5. $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 4\,u_n + 3$. $\qquad u_n = 3\times 4^n - 1 \qquad \sum_{k=7}^{n} u_k = 4(4^{n-6}-1) - n + 6$
6. $u_3 = 2$ et $\forall n \geq 3,\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\,u_n + \frac{3}{4}$. $\qquad u_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2} + \dfrac{3}{2} \qquad \sum_{k=7}^{n} u_k = \frac{1}{16}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-6}\right) + \frac{3}{2}(n-6)$
7. $u_0 = 2,\ u_1 = 7$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2\,u_{n+1} - u_n$. $\qquad u_n = 2+5n \qquad \sum_{k=7}^{n} u_k = \frac{1}{2}(39+5n)(n-6)$
8. $u_3 = 2,\ u_4 = 7$ et $\forall n \geq 3,\ u_{n+2} = 3\,u_{n+1} - 2\,u_n$. $\qquad u_n = -3+5\times 2^{n-2} \qquad \sum_{k=7}^{n} u_k = 3(6-n) + 160(2^{n-6}-1)$

```
def suite(n):
    u=2
    uu=7
    for i in range(n-1):
        uuu=2*uu-u
        u=uu
        uu=uuu
    return uu

def test(n):
    u=2
    uu=7
    for i in range(n-1):
        uuu=2*uu-u
        u=uu
        uu=uuu
    if uuu==2+5*n:
        message="La formule fonctionne"
    else:
        message="La formule ne fonctionne pas"
    return message
```

Exercice 2 (Suites géométriques)

1.
```
def suites(n):
    u=0
    v=1
    for i in range(n):
        aux=v
        v=1/3*(u+2*v)
        u=1/3*(2*u+aux)
    return u,v
```

2. Pour tout n entier naturel, $t_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1} = \dfrac{1}{3}(2u_n + v_n) - \dfrac{1}{3}(u_n + 2v_n) = \frac{1}{3}(u_n - v_n) = \frac{1}{3}t_n$
   et $s_{n+1} = u_{n+1} + v_{n+1} = \dfrac{1}{3}(2u_n + v_n) + \dfrac{1}{3}(u_n + 2v_n) = u_n + v_n = s_n$
   Donc (t_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $t_0 = u_0 - v_0$ et (s_n) est une suite constante égale à $s_0 = u_0 + v_0$
   Donc pour tout n entier naturel, $t_n = t_0 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$ et $s_n = s_0$.
3. Or pour tout entier naturel, $u_n = \frac{1}{2}(s_n + t_n)$ et $v_n = \frac{1}{2}(s_n - t_n)$ d'où $u_n = \frac{1}{2}\left(s_0 + t_0 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$ et $v_n = \frac{1}{2}\left(s_0 - t_0 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$
   Au final, $u_n = \frac{1}{2}\left(u_0 + v_0 + (u_0 - v_0) \times \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$ et $v_n = \frac{1}{2}\left(u_0 + v_0 - (u_0 - v_0) \times \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$
4. Puisque $-1 < \frac{1}{3} < 1$, $\left(\frac{1}{3}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc (u_n) et (v_n) convergent vers $\frac{u_0+v_0}{2}$

Exercice 3 (Sommes de termes successifs de suites arithmétique ou géométrique)

1. La somme des n premiers entiers pairs vaut $n(n-1)$ et celle des n premiers entiers impairs n^2. En effet, les entiers pairs et les entiers impairs forment deux suites arithmétiques de raison 2. Pour calculer la somme de leurs n termes consécutifs, on peut au choix :
   - Utiliser la formule suivante : $\text{Somme}_{\text{arithm}} = \text{nombre de termes} \times \text{moyenne des termes extrêmes}$

     càd $\boxed{\text{Somme}_{\text{arithm}} = \dfrac{(\text{nombre de termes})(\text{premier terme} + \text{dernier terme})}{\mathbf{2}}}$

     $S_{\text{pairs}} = \frac{n(0+2n-2)}{2} = n(n-1)$
     $S_{\text{impairs}} = \frac{n(1+2n-1)}{2} = n^2$
   - Se ramener à un calcul utilisant la formule **(à connaître par cœur)** $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$ (le premier terme étant nul)

     $S_{\text{pairs}} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} 2k = 2\sum_{k=0}^{n-1} k = (n-1)n$

     $S_{\text{impairs}} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} 2k+1 = 2\sum_{k=0}^{n-1} k + \sum_{k=0}^{n-1} 1 = (n-1)n + n = n^2 - n + n = n^2$
2. On reconnaît une somme des n termes consécutifs de la suite géométrique de raison -2 et de premier terme 1.

   On peut utiliser la formule : $\boxed{\text{Somme}_{\text{géom}} = \text{nombre de termes} \dfrac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}}}$

   $S_n = 1 - 2 + 2^2 - 2^3 + \cdots + (-1)^n 2^n = 1 \times \frac{1-(-2)^n}{1-(-2)} = \frac{1}{3}\left(1 - (-2)^n\right)$.

Exercice 4 (Recherche de limites)

Éléments de réponse à étoffer avec d'avantage de rédaction et de justifications pour certaines questions :

1. $u_n \to +\infty$ (quotient simplifié des termes de plus haut degré)
2. $u_n \to -1$ (factorisation par 3^n au numérateur et au dénominateur et utilisation du fait que $(2/3)^n \to 0$ car $-1 < 2/3 < 1$)
3. $u_n \to 0$ (croissances comparées usuelles en 0)
4. $u_n \to 0$ (quantité conjuguée)
5. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ Pour tout k dans $[\![1;n]\!]$, $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, donc :

   $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k}$ en effectuant un changement d'indice dans la deuxième somme

   $u_n = 1 + \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{n=1}$ en sortant le premier terme de la première somme et le dernier de la deuxième

   $u_n = 1 - \dfrac{1}{n+1} \to 1$ *NB : ce genre de somme est appelée somme télescopique*
6. Puisque u_n est une somme de n termes (classés dans l'ordre décroissant, ce qui facilite la chose), on peut dire qu'elle est plus grande que n fois son terme le plus petit et aussi plus petite que n fois son terme le plus grand.
   d'où $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq u_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ Or il est facile de démontrer que la suite majorante et la suite minorantes sont ceonvergentes vers 1, donc d'après le théorème d'encadrement, $u_n \to 1$

Exercice 5 (Étude classique des suites d'une suite du type $u_{n+1} = f(u_n)$)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$

1. Si, pour tout entier naturel n, on note HR_n la propriété "u_n est bien défini et strictement positif", on montre facilement par récurrence que HR_n est vraie pour tout entier naturel n.

2.
```
import numpy as np
def suite(n):
    u=0
    for i in range(n):
        u=np.sqrt(u+2)
    return u
```
3. En notant f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x)=\sqrt{x+2}$, on constate que :
   - $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout entier $n\in\mathbb{N}$
   - si on suppose que (u_n) converge vers ℓ (et alors $\ell\geq 0$)
   - puisque f est continue sur $\mathbb{R}_+$, donc en ℓ,

   alors d'après le théorème du point fixe, ℓ vérifie $f(\ell)=\ell \Leftrightarrow \sqrt{\ell+2}=\ell \underset{\ell\geq 0}{\Leftrightarrow} \ell+2=\ell^2 \Leftrightarrow \ell^2-\ell-2=0 \Leftrightarrow \underbrace{\ell=-1}_{\text{impossible}}$ ou $\ell=2$
4. f est la composée de deux fonction croissantes sur des intervalles compatibles, c'est donc une fonction croissante sur $\mathbb{R}_+$.
5. Pour tout entier naturel n, posons $\mathscr{P}_n$ la propriété : "$u_n\leq u_{n+1}\leq 2$" et montrons par récurrence que cette propriété est vraie pour tout entier naturel.
   • Initialisation : $u_0=0$ et $u_1=\sqrt{2}$ donc $u_0\leq u_1\leq 2$ et donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.
   • Hérédité : Supposons que $\mathscr{P}_n$ est vraie pour un entier n fixé dans $\mathbb{N}$.
   On a donc $u_n\leq u_{n+1}\leq 2$
   Par croissance de f sur $\mathbb{R}_+$ et puisque $u_n\geq 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, on en déduit : $f(u_n)\leq f(u_{n+1})\leq f(2)$, C'est à dire $u_{n+1}\leq u_{n+2}\leq 2$.
   Donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie
   • Conclusion : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\leq u_{n+1}\leq 2$
   (u_n) est donc majorée croissante donc elle converge d'après le théorème de la limite monotone.
   D'après la question 2, on en déduit que (u_n) converge vers 2.

Exercice 6 (Étude avec IAF des suites d'une suite du type $u_{n+1}=f(u_n)$)

On considère dans cet exercice la fonction f définie pour $x\geq 0$ par $f(x)=\frac{1}{x+1}$

1. Blablabla $r_2=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ est la seule racine appartenant à $]0;1[$ de l'équation $x^2+x-1=0$.
2. On montre que $\left[\frac{1}{2},1\right]$ est stable par f :

$$\begin{aligned} x\in\left[\tfrac{1}{2},1\right] &\Leftrightarrow \tfrac{1}{2}\leq x\leq 1 \\ &\Leftrightarrow \tfrac{3}{2}\leq x+1\leq 2 \\ &\Leftrightarrow \tfrac{2}{3}\geq \tfrac{1}{x+1}\geq \tfrac{1}{2} && \text{par décroissance de la fonction inverse sur } \mathbb{R}_+^* \\ &\Rightarrow \tfrac{1}{2}\leq f(x)\leq 1 \quad\Leftrightarrow\quad f(x)\in\left[\tfrac{1}{2},1\right] \end{aligned}$$

3. f est dérivable sur $\left[\frac{1}{2},1\right]$ en tant qu'inverse d'une fonction dérivable ne s'annulant pas.
   $\forall x\in\left[\frac{1}{2},1\right],\ f'(x)=-\frac{1}{(x+1)^2}$

   Point méthode : Pour montrer une majoration portant sur $|f'(x)|$ (essentielle pour appliquer l'IAF) :
   • On part d'une inégalité portant sur x et on en déduit une inégalité portant sur $f'(x)$
   (Comme dans la question précédente sauf que l'on considère l'expression de $f'(x)$ et non $f(x)$)
   • **OU** on dérive encore f' et en cherchant le signe de $f''(x)$, on en déduit les variations de $f'(x)$ et donc on peut connaitre le maximum et/ou minimum de $f'(x)$.
   ↪ Une fois que l'on a encadré, majoré ou minoré $f'(x)$, on peut avoir une idée de la majoration de $|f'(x)|$ en prétant attention au signe de $f'(x)$.

   - Première méthode :
     f est deux fois dérivable sur $\left[\frac{1}{2},1\right]$ en tant qu'inverse d'une fonction dérivable ne s'annulant pas.
     $\forall x\in\left[\frac{1}{2},1\right],\ f''(x)=\frac{2}{(x+1)^3}\geq 0$ donc f' est croissante sur $\left[\frac{1}{2},1\right]$.
     Son minimum est donc atteint en $\frac{1}{2}$ et vaut $f'\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^2}=-\dfrac{4}{9}$
     Son maximum est donc atteint en 1 et vaut $f'(1)=-\dfrac{1}{4}$
     Donc pour tout $x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$, $\quad -\dfrac{4}{9}\leq f'(x)\leq -\dfrac{1}{4}$

▶ Deuxième méthode :

$$\begin{aligned} x\in\left[\tfrac{1}{2},1\right] &\Leftrightarrow \frac{1}{2}\leq x\leq 1 \\ &\Leftrightarrow \tfrac{3}{2}\leq x+1\leq 2 \\ &\Leftrightarrow \left(\tfrac{3}{2}\right)^2\leq (x+1)^2\leq 4 \\ &\Leftrightarrow \tfrac{4}{9}\geq \tfrac{1}{(x+1)^2}\geq \tfrac{1}{4} && \text{par décroissance de la fonction inverse sur } \mathbb{R}_+^* \\ &\Leftrightarrow -\tfrac{4}{9}\leq f'(x)\leq -\tfrac{1}{4} \end{aligned}$$

Donc dans les deux cas on a prouvé pour tout $x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$, $-\dfrac{4}{9}\leq f'(x)\leq -\dfrac{1}{4}$ d'où $\dfrac{1}{4}\leq\left|f'(x)\right|\leq\dfrac{4}{9}$

4. La fin est classique : f étant continue sur $\left[\frac{1}{2},1\right]$ et dérivable sur $\left]\frac{1}{2},1\right[$, et puisque pour tout x dans $\left]\frac{1}{2},1\right[$, on a $\left|f'(x)\right|\leq\dfrac{4}{9}$, d'après l'inégalité des accroissements finis, pour tout couple (x_1,x_2) dans $\left[\frac{1}{2},1\right]$, on a $\left|f(x_1)-f(x_2)\right|\leq\frac{4}{9}|x_1-x_2|$.
   En particulier, puisque u_n et r_2 sont dans $\left[\frac{1}{2},1\right]$ (démonstration par récurrence immédiate et résultat évident puisque $\sqrt{5}\in[2;3]$), on en déduit : $\left|f(u_n)-f(r_2)\right|\leq\frac{4}{9}|u_n-r_2|$
   Mais r_2 étant solution de $x^2+x-1=0$, c'est aussi un point fixe de f (puisque $x^2+x-1=0$ est équivalente à $x=\frac{1}{x+1}$), c'est-à-dire que $f(r_2)=r_2$ D'autre part, $f(u_n)=u_{n+1}$
   Il vient donc que pour tout entier naturel, $\left|u_{n+1}-r_2\right|\leq\frac{4}{9}|u_n-r_2|$.
   Une récurrence permet ensuite de prouver que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|u_n-r_2|\leq\left(\frac{4}{9}\right)^n$
   Et puisque $-1<\frac{4}{9}<1$, le théorème des gendarmes nous assure enfin que $u_n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}r_2$
5.

Exercice 7 ('Etude classique des suites d'une suite du type $u_{n+1}=f(u_n)$ (cas f décroissante))

Soit (u_n) la suite définie par $u_0=1\quad\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=1+\frac{2}{u_n}$

1.
2.
3.
4.
5.

Exercice 8 (Étude classique des suites d'une suite du type $u_{n+1}=f(u_n)$)

On considère la suite définie par la donnée de $u_0\in/R$ fixé et de la relation de récurrence $u_{n+1}=f(u_n)$ où $f:x\mapsto\frac{x^3+6x}{3x^2+2}$

1. f est définie sur $\mathbb{R}$, et dérivable sur $\mathbb{R}$ par opérations sur les fonctions usuelles. Elle est impaire sur $\mathbb{R}$.
   De plus, $f'(x)=3\frac{(x^2-2)^2}{(3x^2+2)^2}$, qui est évidemment strictement positive, sauf en un nombre fini de points où elle s'annule, donc elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. $f(x)-x=\frac{2x(2-x^2)}{3x^2+2}$. Donc l'équation $f(x)=x$ a pour solutions 0, $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$.
   Ainsi, les points fixes de f sont 0, $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$.Et $f(x)-x$ est du signe de $x(2-x^2)=x(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$. On peut se contenter d'étudier le signe pour $x\geq 0$ et de déduire le reste grâce à la parité de f. Dans tous les cas, on dresse un tableau de signes.
   Ainsi, $f(x)-x\geq 0$ pour $x\in[0;\sqrt{2}]$ et $f(x)-x\leq 0$ pour $x\in[\sqrt{2};+\infty[$.
3. Dans le cas où $u_0=0$, $u_0=-\sqrt{2}$ ou $u_0=\sqrt{2}$, la suite est constante puisque ce sont les points fixes de f.
4. On suppose dans cette question que $u_0\in]0;\sqrt{2}[$. On montre les deux premiers points par récurrence (dans une seule récurrence même en prenant $(HR_n: 0<u_n<un+1<\sqrt{2}$. Comme elle est croissante majorée, elle converge. Sa limite étant nécessairement un point fixe de f par application du point fixe (ne pas oublier de rappeler que f est continue sur $]0;\sqrt{2}[$ dans la rédaction !), $u_n\to\sqrt{2}$.
5. Si $u_n\in]\sqrt{2};+\infty[$, on montre par récurrence que (u_n) est décroissante minorée (par $\sqrt{2}$) donc elle convergente, puis par application du thm du point fixe, elle converge vers $\sqrt{2}$.
   Si $u_0<0$, et grâce au caractère impair de f, la suite (u_n) converge vers $-\sqrt{2}$.

Exercices d'approfondissement

Exercice 9 (Suite récurrente linéaire double "détournée")

1. Puisqu'une récurrence évidente permet de prouver que (u_n) est à termes strictement positifs, on considère la suite auxiliaire $v_n=\ln(u_n)$ pour tout entier naturel n. Cette suite vérifie la relation de récurrence double $v_{n+2}=\frac{1}{2}(v_{n+1}+v_n)$.

Avec les méthodes classiques de résolution des suites récurrentes doubles on trouve que $v_n = \frac{2}{3}\left(1-(\text{-}1/2)^n\right)\times\ln 2$
On reconnait par ailleurs que $\frac{2}{3}\left(1-(\text{-}1/2)^n\right) = \frac{1-(\text{-}1/2)^n}{1-(\text{-}1/2)}$ est la somme des termes consécutifs de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison -1/2. Appelons là S_n.
on a alors $v_n = S_n \times \ln 2$ et $u_n = e^{v_n} = e^{S_n \ln 2} = 2^{S_n}$ pour tout entier naturel n.

2.
```
import numpy as np
def ex9(n):
        u=1
        uu=2
        for k in range(2,n+1):  # k varie de 2 à n
                w=np.sqrt(u*uu) # variable auxiliaire pour ne pas écraser abusivement une valeur
                u=uu            # nouvel avant dernier terme
                uu=w            # nouveau dernier terme
        return uu
```

Exercice 10 (Suite récurrente linéaire double "détournée")

1. Même astuce que dans l'exercice précédent. On pose $v_n = \ln(u_n)$ pour tout entier naturel n. Cette suite vérifie la relation de récurrence double $v_{n+2} = 2v_{n+1} - v_n$.
   Avec les méthodes classiques de résolution des suites récurrentes doubles on a $v_n = \ln 2 + n\ln\frac{3}{2}$ pour tout entier naturel n.
   D'où $u_n = e^{v_n} = e^{\ln 2 + n\ln\frac{3}{2}} = e^{\ln 2}e^{n\ln\frac{3}{2}} = 2\times\left(\frac{3}{2}\right)^n$ pour tout entier naturel n.
2.
```
def ex10(n):
        u=2
        uu=3
        for k in range(2,n+1):  # k varie de 2 à n
                w=uu/u          # variable auxiliaire pour ne pas écraser abusivement une valeur
                u=uu            # nouvel avant dernier terme
                uu=w            # nouveau dernier terme
        return uu
```

Exercice 11 (Suite définie par un produit)

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \prod_{k=1}^{n}(1+\frac{k}{n^2})$.

1. L'inégalité de droite traduit la concavité de la fonction $x\mapsto\ln(1+x)$ en 0, qui est un résultat de cours.
   L'inégalité de gauche s'obtient en étudiant $f : x\mapsto \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$. f étant dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$ par opération sur les fonctions usuelles, et pour $x>0$, $f'(x) = \frac{x^2}{1+x} > 0$, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+\star}$. Or $f(0)=0$, donc f est à valeurs positives, CQFD.
2. On remarque que la suite est à termes strictement positifs. On peut donc étudier $v_n = \ln u_n = \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$.
   En utilisant l'inégalité montrée précédemment, il vient :
   $$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k - \frac{4}{n^4}\sum_{k=1}^{n}k^2 \;\le\; v_n \;\le\; \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k \qquad (\star)$$
   Or $\sum_{k=1}^{n}k = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\sum_{k=1}^{n}k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (À CONNAÎTRE PAR ♡ !)
   En remplaçant dans $(\star)$, en réduisant les expressions des membres de droite et gauche, il vient que les suites majorantes et minorantes convergent vers $\frac{1}{2}$ et par conséquent (v_n) également, par application du théorème des gendarmes.
   Finalement, puisque $u_n = e^{v_n}$, et par continuité de la fonction exponentielle, $u_n \to e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$.

Exercice 12 (du type $u_{n+1} = f_n(u_n)$)

Il est facile de montrer par récurrence que $u_n \ge 0$ pour tout n. Alors $-u_n \le 0$, et donc $0 \le e^{-u_n} \le 1$.
Ainsi, $0 \le \frac{e^{-u_n}}{n} \le \frac{1}{n}$. Le théorème d'encadrement prouve que $u_n \to 0$.

Exercice 13 (du type $f(u_n) = n$)

1. C'est une application classique du théorème de la bijection avec $f : x\mapsto e^x + x$. On montre facilement que f réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et que $u_n = f^{-1}(n)$.
2. Puisque f est strictement croissante, sa bijection réciproque f^{-1} également. On en déduit que pour tout n, puisque $n+1>n$, on a $u_{n+1} = f^{-1}(n+1) > f^{-1}(n) = u_n$. Finalement, (u_n) est croissante. De plus, comme $f^{-1}(x) \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$ (puisque $f(x) \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$), on en déduit que (u_n) diverge vers $+\infty$.

3. • Soit $n \geq 1$ fixé. Comme f est strictement croissante, montrer que $u_n \leq \ln n$ revient à montrer que $f(u_n) \leq f(\ln n)$.
Or $f(u_n) = n$ et $f(\ln n) = e^{\ln n} + \ln n$. Ainsi, $f(u_n) \leq f(\ln n)$ et donc $u_n \leq \ln n$ pour $n \geq 1$.

   • De même, $f(\ln(n)-1) = e^{\ln(n)-1} + \ln(n) - 1 = \frac{1}{e}n + \ln(n) - 1$ Donc $f(\ln(n)-1) - f(u_n) = \frac{1}{e}n + \ln(n) - 1 - n = \left(\frac{1}{e} - 1\right)n + \ln(n) - 1 = n\left(\frac{1}{e} - 1 + \frac{\ln n}{n} + \frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ par croissance comparées et opérations sur les limites.
Donc pour n assez grand, $f(\ln(n)-1) < f(u_n)$. Comme f^{-1} est strictement croissante, $\ln(n) - 1 \leq u_n$ pour n assez grand.
4. D'après la question précédente, pour n assez grand, $\ln(n) - 1 \leq u_n \leq \ln(n)$, et donc $1 - \frac{1}{\ln(n)} \leq \frac{u_n}{\ln(n)} \leq 1$.
D'après le théorème d'encadrement, $\frac{u_n}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et finalement, $(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$

Exercice 14 (du type $f_n(u_n) = 0$)

On note, pour tout $n \geq 1$, a_n la solution de l'équation $\sum_{k=1}^{n} x^k = 1$ appartenant à l'intervalle $[0,1]$

1.
2.
3.
4.
5.
6.

Exercice 15

Exercice 13 de la fiche du TD2 sur les fonctions.