Couples de variables aléatoires discrètes

Exercices d'application directe du cours

Exercice 1

La loi conjointe d'un couple (X,Y) est donnée par le tableau :

X \ Y	0	1/2	1
0	1/6	1/12	1/3
1	1/4	0	1/6

1. Déterminer les lois marginales.
2. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant que $(X=1)$. Quelle loi usuelle reconnaît-on ?

Exercice 2

La loi conjointe d'un couple (X,Y) est donnée par le tableau :

X \ Y	0	1	2
0	1/36	1/9	1/9
1	1/12	1/3	1/3

1. Déterminer les lois marginales.
2. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant que $(X=1)$. Pouvait-on prévoir cela ? Reconnaître une loi usuelle.
4. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant que $(Y=0)$. Quelle loi usuelle reconnaît-on ?
5. Déterminer la loi de $X+Y$. Donner son espérance.
6. Déterminer l'espérance de XY.

Exercice 3

La loi conjointe du couple (X,Y) est donnée par le tableau suivant.
Déterminer les lois marginales.
Calculer $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{E}(Y)$, $\mathrm{E}(XY)$.
Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

X \ Y	0	1	2
0	1/20	1/4	0
1	17/60	1/4	1/6

Exercice 4

1. Soit X une v.a.r. suivant la loi uniforme sur $X(\Omega)=\{-1,0,1\}$. Soit $Y=X^2$. Déterminer la loi du couple (X,Y). En déduire la loi de Y.
2. Mêmes questions avec $X(\Omega)=\{-2,-1,0,1,2\}$.

Exercice 5 (Calcul de proba du type $\mathrm{P}(X_1=X_2)$, cas faciles)

1. On dispose d'une urne contenant n boules, indiscernables au toucher, et numérotées de 1 à n, avec $n\geq 2$. On extrait une boule, on la remet dans l'urne, et on en extrait une deuxième. On note X_1 le numéro de la première boule extraite et X_2 le numéro de la deuxième.
   a. Déterminer la loi du couple (X_1,X_2).
   b. En déduire la probabilité de l'événement $(X_1=X_2)$.
2. On dispose d'une urne contenant n boules, indiscernables au toucher, et numérotées de 1 à n, avec $n\geq 2$. On extrait une boule, on ne la remet pas dans l'urne, et on en extrait une deuxième. On note Y_1 le numéro de la première boule extraite et Y_2 le numéro de la deuxième.
   a. Déterminer la loi du couple (Y_1,Y_2).
   b. En déduire la probabilité de l'événement $(Y_1=Y_2)$.

Exercice 6

On considère n boîtes numérotées de 1 à n. La boîte numéro k contient k boules numérotées de 1 à k. On choisit au hasard une boîte, puis une boule dans cette boîte. Soient X et Y les numéros de la boîte et de la boule obtenues.

1. Déterminer la loi du couple (X,Y).
2. Calculer $\mathrm{P}(X=Y)$.
3. Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance.

Exercice 7 (d'après EML 2018)

On considère deux var indépendantes X et Y définies sur un même espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},\mathrm{P})$, suivant toutes les deux la loi de Poisson de paramètre λ.

Montrer que $\mathrm{P}\big((X=Y)\big)=e^{-2\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{2k}}{(k!)^2}$

Exercice 8

On range au hasard trois objets dans un meuble vide contenant trois tiroirs et on note X le nombre d'objets contenus dans le premier tiroir et Y le nombre de tiroirs vides.

1. Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y).
2. Déterminer les lois marginales. Reconnaître la loi de X et expliquer pourquoi on aurait pu prévoir ce résultat.
3. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $(Y = 1)$. La connaître.
4. Dire si les var X et Y sont indépendantes ou non.

Exercice 9 (Exercice très rapide)

On considère deux variables aléatoires indépendantes X et Y définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$, suivant respectivement la loi de Poisson de paramètre λ et la loi de Bernoulli de paramètre p.

1. Déterminer $\mathrm{E}(XY)$.
2. Déterminer $\mathrm{E}(X^2Y)$.

Exercice d'approfondissement tirés d'annales

Exercice 10 (d'après EDHEC 2005)

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Deux joueurs A et B disposent d'une pièce équilibrée. Chacun des joueurs lance la pièce n fois. On désigne par X, Y, Z, et T les variables aléatoires suivantes : X représente le nombde de "face" obtenus par A, Y le nombre de "face" obtenus par B, $Z = X + Y$ et $T = X - Y$.

1. Déterminer la loi suivie par la var Z.
2. Exprimer la probabilité de l'événement $(T = 0)$ en fonction de $\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}\binom{n}{n-j}$
3. Z et T sont-elles indépendantes ? (On pourra considérer les événements $(Z = 1)$ et $(T = 0)$.)

Exercice 11 (d'après oral HEC)

On considère deux var indépendantes X et Y définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$, suivant toutes les deux une loi géométrique de paramètre p. Déterminer la loi de $X + Y$ puis la loi de $X - Y$.

Proposition d'exercices à rendre sur feuille

Exercice 12

Soit X une variable aléatoire telle que pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $P(X = i) = \dfrac{i}{2^{i+1}}$. On dispose de X boules numérotées de 1 à X dans une urne. On effectue un tirage, et on note Y le numéro de la boule tirée.

1. Vérifier que la loi de X est bien une loi de probabilité. Calculer $E(X)$. On donne $V(X) = 2$.
2. Donner la loi conjointe de X et de Y.
3. Déterminer la loi de Y puis son espérance.

'

Exercice 13

Une boite contient 3 boules blanches et 2 boules noires. On y effectue indéfiniment des tirages avec remise de 2 boules prises simultanément. On définit les évènements :

- A_n : « on obtient deux boules de couleurs différentes au n^{e} tirage »,
- B_n : « on obtient deux boules blanches au n^{e} tirage ».

1. Calculer $P(A_n)$ et $P(B_n)$.
2. On note X le numéro du tirage au cours duquel on obtient pour la première fois deux boules de couleurs différentes, et Y le numéro du tirage au cours duquel on obtient pour la première fois deux boules blanches.

   a. Déterminer les lois de X, Y et leurs espérances.
   b. Déterminer la loi du couple (X, Y).
   c. En déduire $P(X < Y)$.