Couples de variables aléatoires discrètes - Corrigés

Exercices d'application directe du cours

Exercice 1

1.

$X \backslash Y$	0	1/2	1	$\mathrm{P}(X=i)$
0	1/6	1/12	1/3	7/12
1	1/4	0	1/6	5/12
$\mathrm{P}(Y=j)$	5/12	1/12	1/2	

2. Les variables X et Y ne sont pas indépendantes car $\mathrm{P}\big((X=1)\cap(Y=1/2)\big)=0\neq \mathrm{P}(X=1)\times\mathrm{P}(Y=1/2)$.

3. $\mathrm{P}_{(X=1)}(Y=0)=\dfrac{\mathrm{P}\big((X=1)\cap(Y=0)\big)}{\mathrm{P}(X=1)}=\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{12}}=\dfrac{3}{5}$

$\mathrm{P}_{(X=1)}(Y=1)=\dfrac{\mathrm{P}\big((X=1)\cap(Y=1)\big)}{\mathrm{P}(X=1)}=\dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{5}{12}}=\dfrac{2}{5}$

On reconnaît la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{2}{5}$.

Exercice 2

1.

$X \backslash Y$	0	1	2	$\mathrm{P}(X=i)$
0	1/36	1/9	1/9	1/4
1	1/12	1/3	1/3	3/4
$\mathrm{P}(Y=j)$	1/9	4/9	4/9	

2. Un calcul fractionnaire rapide nous prouve que pour les six cases du tableau :
$P\big([X=i]\cap[Y=j]\big)=P(X=i)\times P(Y=j)$ pour tout $(i,j)\in[\![0,1]\!]\times[\![0,2]\!]$
Par exemple $P\big([X=1]\cap[Y=1]\big)=\frac{1}{3}=\frac{3}{4}\times\frac{4}{9}=P(X=1)\times P(Y=1)$
Cette égalité étant valable **pour tous les couples** de $X(\Omega)\times Y(\Omega)$, les variables X et Y sont indépendantes.

3. Loi conditionnelle de Y sachant que $(X=1)$:

$\mathrm{P}_{(X=1)}(Y=0)=\dfrac{\mathrm{P}\big((X=1)\cap(Y=0)\big)}{\mathrm{P}(X=1)}=\dfrac{\frac{1}{12}}{\frac{3}{4}}=\dfrac{1}{9}$

$\mathrm{P}_{(X=1)}(Y=1)=\dfrac{\mathrm{P}\big((X=1)\cap(Y=1)\big)}{\mathrm{P}(X=1)}=\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{3}{4}}=\dfrac{4}{9}$

$\mathrm{P}_{(X=1)}(Y=2)=\dfrac{\mathrm{P}\big((X=1)\cap(Y=2)\big)}{\mathrm{P}(X=1)}=\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{3}{4}}=\dfrac{4}{9}$

Ces calculs auraient tout à fait pu être évités puisque X et Y sont indépendantes donc :
$\mathrm{P}_{(X=1)}(Y=0)=\mathrm{P}(Y=0)$, $\mathrm{P}_{(X=1)}(Y=1)=\mathrm{P}(Y=1)$ et $\mathrm{P}_{(X=1)}(Y=2)=\mathrm{P}(Y=2)$
On reconnaît la loi binomiale $\mathscr{B}\big(2,\frac{2}{3}\big)$.

4. Loi conditionnelle de X sachant que $(Y=0)$: C'est aussi la loi de la variable X, puisque X et Y dont indépendantes.
$\mathrm{P}_{(Y=0)}(X=0)=\mathrm{P}(X=0)=\frac{1}{4}$ $\mathrm{P}_{(Y=0)}(X=1)=\mathrm{P}(X=1)=\frac{3}{4}$
On reconnait la loi de Bernoulli de paramètre 3/4.

5. Ici, si la loi de la somme n'avait pas été demandée, il aurait été plus rapide, pour calculer l'espérance de la somme de raisonner par linéarité de l'espérance : $\mathrm{E}(X+Y)=\mathrm{E}(X)+\mathrm{E}(Y)=\frac{3}{4}+2\times\frac{2}{3}=\frac{25}{12}$
Retrouvons ce résultat en étudiant la loi de la somme : $(X+Y)(\Omega)=[\![0,3]\!]$
Toutes les réunions mentionnées ci-dessous sont des réunions disjointes, et on peut donc dire que les probabilités de ces réunions sont égale à la somme des probabilités des événements qui les composent :
$(X+Y=0)=(X=0,Y=0)$ donc $\mathrm{P}(X+Y=0)=\mathrm{P}(X=0,Y=0)=\frac{1}{36}$
$(X+Y=1)=(X=0,Y=1)\cup(X=1,Y=0)$ donc $\mathrm{P}(X+Y=1)=\mathrm{P}(X=0,Y=1)+\mathrm{P}(X=1,Y=0)=\frac{1}{12}+\frac{1}{9}=\frac{7}{36}$
$(X+Y=2)=(X=0,Y=2)\cup(X=1,Y=1)$ donc $\mathrm{P}(X+Y=2)=\mathrm{P}(X=0,Y=2)+\mathrm{P}(X=1,Y=1)=\frac{1}{9}+\frac{1}{3}=\frac{4}{9}$
$(X+Y=3)=(X=1,Y=2)$ donc $\mathrm{P}(X+Y=3)=\mathrm{P}(X=1,Y=2)=\frac{1}{3}$

Donc la loi de la somme est donnée par le tableau :

$X+Y$	0	1	2	3
$\mathrm{P}(X+Y=k)$	1/36	7/36	4/9	1/3

D'où $\mathrm{E}(X+Y)=0\times\frac{1}{36}+1\times\frac{7}{36}+2\times\frac{4}{9}+3\times\frac{1}{3}=\frac{75}{36}=\frac{25}{12}$

6. Puisque X et Y sont indépendantes, $\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y) = \frac{3}{4} \times 2 \times \frac{2}{3} = 1$
On aurait aussi pu déterminer la loi de XY (ici c'est très simple) et constater que $XY \hookrightarrow \mathscr{U}([\![0,2]\!])$, pour aboutir à la même conclusion.

Exercice 3

La loi conjointe du couple (X,Y) est donnée par le tableau suivant.

X \ Y	0	1	2	$P(X=i)$
0	1/20	1/4	0	3/10
1	17/60	1/4	1/6	7/10
$P(Y=j)$	1/3	1/2	1/6	

D'où $\mathrm{E}(X) = 0 \times \frac{3}{10} + 1 \times \frac{7}{10} = \frac{7}{10}$
et $\mathrm{E}(Y) = 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

Le calcul de $\mathrm{E}(XY)$ passe par la connaissance de la loi de la var XY :

X \ Y	0	1	2
0	0 ; 1/20	0 ; 1/4	0 ; 0
1	0 ; 17/60	1 ; 1/4	2 ; 1/6

D'où la loi de XY :

XY	0	1	2
$P(XY=k)$	7/12	1/4	1/6

Ainsi que son espérance : $\mathrm{E}(XY) = 0 \times \frac{7}{12} + 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{6} = \frac{7}{12}$

X et Y ne sont pas indépendantes car $\mathrm{P}\big((X=0) \cap (Y=2)\big) = 0 \neq \mathrm{P}(X=0) \times \mathrm{P}(Y=2)$.

Remarque intéressante : POURTANT, $\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$ (un simple calcul pour s'en convaincre). On a donc exhibé un contre exemple à la réciproque de la propriété qui dit que si X et Y sont indépendantes, on peut en déduire que $\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$. Cette propriété n'est donc pas une caractérisation : on observe ici que la réciproque est fausse !

Exercice 4

1. $X(\Omega) = \{-1,0,1\}$ et $Y(\Omega) = \{0,1\}$. Il suffit de regarder les probabilités de $P(X=i, Y=j)$, ou autrement dit $P([X=i] \cap [Y=j])$ pour les six couples appartenant à $X(\Omega) \times Y(\Omega)$. Parmi eux, les trois probabilités ne s'annulant pas sont :
$P(X=-1, Y=1) = 1/3$, $P(X=0, Y=0) = 1/3$ et $P(X=1, Y=1) = 1/3$ que l'on pourrait résumer dans un tableau à double entrée.
La loi de Y est obtenue en appliquant la formule des probabilité totales au système complets d'événements $(X=-1)$, $(X=0)$, $(X=1)$:
$P(Y=0) = P\big([X=-1] \cap [Y=0]\big) + P\big([X=0] \cap [Y=0]\big) + P\big([X=1] \cap [Y=0]\big) = 0 + \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{3}$
$P(Y=1) = P\big([X=-1] \cap [Y=1]\big) + P\big([X=0] \cap [Y=1]\big) + P\big([X=1] \cap [Y=1]\big) = \frac{1}{3} + 0 + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

2. Même méthode. On obtient :

Y	0	1	4
$P(Y=j)$	1/5	2/5	2/5

Exercice 5 (Calcul de proba du type $\mathrm{P}(X_1 = X_2)$, cas faciles)

1. On dispose d'une urne contenant n boules, indiscernables au toucher, et numérotées de 1 à n, avec $n \geq 2$. On extrait une boule, on la remet dans l'urne, et on en extrait une deuxième. On note X_1 le numéro de la première boule extraite et X_2 le numéro de la deuxième.

   a. Les tirages se font avec remise, X_1 et X_2 sont donc indépendantes et suivent toutes deux la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$.
   Donc, pour tout couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]$, $\quad \mathrm{P}(X_1 = i, X_2 = j) = \frac{1}{n} \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}$

   b. Classiquement,

$$\begin{aligned} P(X_1 = X_2) &= \sum_{k=1}^{n} P\big([X_1 = k] \cap [X_1 = X_2]\big) \quad \text{formule des probabilités totales avec le système complet d'événements } \big([X_1 = k]\big)_{k \in [\![1,n]\!]} \\ &= \sum_{k=1}^{n} P\big([X_1 = k] \cap [X_2 = k]\big) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \end{aligned}$$

2. On dispose d'une urne contenant n boules, indiscernables au toucher, et numérotées de 1 à n, avec $n \geq 2$. On extrait une boule, on ne la remet pas dans l'urne, et on en extrait une deuxième. On note Y_1 le numéro de la première boule extraite et Y_2 le numéro de la deuxième.

   a. ▶ SI $i = j$, l'événement $(Y_1 = i \cap Y_2 = j)$ est impossible car les tirages se font sans remise, donc $\mathrm{P}(Y_1 = i \cap Y_2 = j) = 0$.
   ▶ Si $i \neq j$, $\quad \mathrm{P}(Y_1 = i \cap Y_2 = j) = \mathrm{P}(Y_1 = i) \times \mathrm{P}_{(Y_1 = i)}(Y_2 = j) = \frac{1}{n} \times \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n(n-1)}$.

   b. On trouve évidemment que $P(Y_1 = Y_2) = 0$

Exercice 6

On considère n boîtes numérotées de 1 à n. La boîte numéro k contient k boules numérotées de 1 à k. On choisit au hasard une boîte, puis une boule dans cette boîte. Soient X et Y les numéros de la boîte et de la boule obtenues.

1. $X(\Omega) = Y(\Omega) = [\![1,n]\!]$ et X suit la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$ d'où $P(X=i) = \frac{1}{n}$ pour tout i compris entre 1 et n.
   $(X=i)$ étant de probabilité non nulle, il vient :
   $\mathrm{P}\big((X=i)\cap(Y=j)\big) = \mathrm{P}_{(X=i)}(Y=j)\mathrm{P}(X=i) = \frac{1}{i}\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{ni}$ pour $j \leq i$
   puisque l'urne i ne contenant que des boules numérotées de 1 à i, la probabilité de tirer chaque boule est de $\frac{1}{i}$.
   Pour $j > i$, $\mathrm{P}(\big((X=i)\cap(Y=j)\big) = 0$

2. On utilise la méthode habituelle en faisant attention : ici X et Y ne sont pas indépendants comme dans beaucoup d'autres exercices :

$$\begin{aligned}
P(X=Y) &= \sum_{k=1}^{n} P\big([X=k]\cap[X=Y]\big) && \text{formule des probabilités totales avec le système complet d'événements } \big([X=k]\big)_{k\in[\![1,n]\!]}\\
&= \sum_{k=1}^{n} P\big([X=k]\cap[Y=k]\big) && \text{attention ici } X \text{ et } Y \text{ ne sont pas indépendantes, on utilise directement la loi du couple}\\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{kn}\\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}
\end{aligned}$$

3. • La formule des probabilités totales, associée au système complet d'événements $(X=i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ donne :
   $\mathrm{P}(Y=j) = \sum_{i=1}^{n}\mathrm{P}\big((X=i)\cap(Y=j)\big) = \sum_{i=j}^{n}\frac{1}{ni} = \frac{1}{n}\sum_{i=j}^{n}\frac{1}{i}$ (puisque les $j-1$ premiers termes de la somme sont nuls.)
   • La variable aléatoire Y admet un support fini, donc elle possède une espérance, un moment d'ordre deux et une variance.
   $\mathrm{E}(Y) = \sum_{j=1}^{n} j\mathrm{P}(Y=j) = \sum_{j=1}^{n} j\times\frac{1}{n}\sum_{i=j}^{n}\frac{1}{i} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\frac{j}{i} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\sum_{j=1}^{i} j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\frac{i(i+1)}{2} = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} i+1 = \frac{1}{2n}\big(\frac{n(n+1)}{2}+n\big) = \dfrac{n+3}{4}$
   • Pour la variance, on commence par calculer le moment d'ordre 2 (même méthode que plus haut pour l'interversion des deux sommes, et on aura en plus besoin dans le calcul de se souvenir de la somme des premiers carrés $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$).
   On trouve $\mathrm{E}(Y^2) = \sum_{j=1}^{n} j^2\mathrm{P}(Y=j) = \ldots = \frac{4n^2+15n+17}{36}$

   Puis en utilisant la formule de Koenig-Huygens, $V(Y) = \mathrm{E}\big(Y^2\big) - \big(E(Y)\big)^2 = \frac{4n^2+15n+17}{36} - \big(\frac{n+3}{4}\big)^2 = \dfrac{7n^2+6n-13}{144}$

Exercice 7 (d'après EML 2018)

On considère deux var indépendantes X et Y définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$, suivant toutes les deux la loi de Poisson de paramètre λ.

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X=Y) &= \sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{P}\big((X=k)\cap(X=Y)\big) && \text{d'après la formule des probabilités totales appliquée au SCE } \big((X=k)\big)_{k\in\mathbb{N}}\\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{P}\big((X=k)\cap(Y=k)\big)\\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{P}(X=k)\mathrm{P}(Y=k) && \text{par indépendance}\\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}\right)^2\\
&= e^{-2\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{2k}}{(k!)^2}
\end{aligned}$$

Exercice 8

On range au hasard trois objets dans un meuble vide contenant trois tiroirs et on note X le nombre d'objets contenus dans le premier tiroir et Y le nombre de tiroirs vides.

1. **et 2.** $X(\Omega) = [\![0,3]\!]$ et $Y(\Omega) = [\![0,2]\!]$.
   Il existe $3^3 = 27$ façons de ranger l'ensemble des trois objets dans l'ensemble des trois tiroirs, toutes équiprobables.
   Détaillons l'événement $(X=1, Y=1)$:
   Il y a trois manières de choisir l'objet que l'on place dans le premier tiroir, puis il y a deux façons de choisir le tiroir vide. Il y a donc $3\times 2 = 6$ façons équiprobables de ranger les objets de manière à ce que l'événement $(X=1, Y=1)$ soit réalisé parmi les 27

façons possibles, donc $P(X=1, Y=1) = \frac{6}{27}$.
En réfléchissant à chaque case grâce à de telles considérations de dénombrement, on aboutit au tableau suivant :

X \ Y	0	1	2	$\mathrm{P}(X=i)$
0	0	6/27	2/27	8/27
1	6/27	6/27	0	12/27
2	0	6/27	0	6/27
3	0	0	1/27	1/27
$\mathrm{P}(Y=j)$	6/27	18/27	3/27	

On reconnaît que la loi de X correspond à la loi binomiale $\mathscr{B}(3, 1/3)$, puisque pour chaque $i \in \{0,1,2,3\}$, $\mathrm{P}(X=i) = \binom{3}{i}\left(\frac{1}{3}\right)^i\left(\frac{2}{3}\right)^{3-i}$
Cela était prévisible puisque pour remplir le premier tiroir, on peut considérer que l'on fait la succession trois fois de suite, de manière identique et indépendante de l'épreuve de Bernoulli consistant à mettre un objet dans le tiroir avec une probabilité de $1/3$ (puisque qu'il y a un choix de trois tiroirs équiprobables) et que l'on compte le nombre de succès (le succès étant d'avoir réussi à mettre un objet dans le tiroir).

3. $\mathrm{P}_{(Y=1)}(X=0) = \dfrac{\mathrm{P}\big((X=0)\cap(Y=1)\big)}{\mathrm{P}(Y=1)} = \dfrac{\frac{6}{27}}{\frac{18}{27}} = \dfrac{1}{3}$ de même, on calcule $\mathrm{P}_{(Y=1)}(X=1) = \dfrac{1}{3}$ et $\mathrm{P}_{(Y=1)}(X=2) = \dfrac{1}{3}$.
Il s'agit de la loi uniforme sur $[\![0,2]\!]$.

4. $\mathrm{P}\big((X=1)\cap(Y=2)\big) = 0 \neq \frac{12}{27} \times \frac{18}{27}$ donc X et Y ne sont pas indépendantes.

Exercice 9 (Exercice très rapide)

On considère deux variables aléatoires indépendantes X et Y définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$, suivant respectivement la loi de Poisson de paramètre λ et la loi de Bernoulli de paramètre p.

1. $\mathrm{E}(XY) \underset{\text{par indépendance de } X \text{ et } Y}{=} \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y) = \lambda p$

2. X^2 et Y sont indépendantes car X et Y le sont.
$\mathrm{E}(X^2 Y) = \underset{\text{par indépendance de } X^2 \text{ et } Y}{=} \mathrm{E}(X^2)\mathrm{E}(Y) \underset{\text{formule de Koenig-Huygens}}{=} \big(\mathrm{V}(X) + E(X)^2\big)\mathrm{E}(Y) = (\lambda+\lambda^2)p$

Exercice d'approfondissement tirés d'annales

Exercice 10 (d'après EDHEC 2005)

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Deux joueurs A et B disposent d'une pièce équilibrée. Chacun des joueurs lance la pièce n fois. On désigne par X, Y, Z, et T les variables aléatoires suivantes : X représente le nombre de "face" obtenus par A, Y le nombre de "face" obtenus par B, $Z = X+Y$ et $T = X-Y$.

1. X et Y comptent chacune le nombre de succès parmi n répétitions d'expériences de Bernoulli indépendantes de paramètre $\frac{1}{2}$.
Ainsi $X \hookrightarrow \mathscr{B}\big(n, \frac{1}{2}\big)$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{B}\big(n, \frac{1}{2}\big)$.
$Z = X+Y$ compte le nombre de succès parmi $2n$ répétitions d'expériences de Bernoulli indépendantes et de paramètre $\dfrac{1}{2}$. (Autre argument possible : "par stabilité par la somme de lois binomiales indépendantes de même paramètre p") $Z \hookrightarrow \mathscr{B}\big(2n, \frac{1}{2}\big)$.

2. $$\begin{aligned}
\mathrm{P}(T=0) &= \mathrm{P}(X=Y) \\
&= \sum_{j=0}^{n} \mathrm{P}\big((X=j)\cap(Y=j)\big) && \text{d'après la formule des probabilités totales appliquée au SCE } \big((X=j)\big)_{j\in[\![0]\!]n} \\
&= \sum_{j=0}^{n} \mathrm{P}(X=j)\mathrm{P}(Y=j) && \text{par indépendance} \\
&= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \\
&= \frac{1}{4^n}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\binom{n}{n-j} && \text{car } \binom{n}{j} = \binom{n}{n-j}
\end{aligned}$$

3. L'événement $(Z=1)\cap(T=0)$ est l'événement impossible car la seule solution du système $\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=0 \end{cases}$ est le couple $\big(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\big)$, qui ne fait pas partie du support de (X, Y).
On a donc $\mathrm{P}\big((Z=1)\cap(T=0)\big) = 0$.

Or $\mathrm{P}(Z=1) \neq 0$ car 1 fait partie du support de la loi binomiale Z et $\mathrm{P}(T=0) \neq 0$ (démontré dans la question précédente).
On a donc trouvé l'existence d'un couple d'événement $\big((Z=1),(T=0)\big)$ tel que $\mathrm{P}\big((Z=1)\cap(T=0)\big) \neq \mathrm{P}(Z=1)\times\mathrm{P}(T=0)$, ce qui met en défaut la définition d'indépendance. Donc Z et T ne sons pas indépendantes.

Exercice 11 (d'après oral HEC)

On considère deux var indépendantes X et Y définies sur un même espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},\mathrm{P})$, suivant toutes les deux une loi géométrique de paramètre p. Déterminer la loi de $X+Y$ puis la loi de $X-Y$.

• Notons $Z = X+Y$. On a alors $Z(\Omega) = [\![2;+\infty[\![$. D'après la formule des probabilités totales associées au SCE $(X=i)_{i\in\mathbb{N}^*}$

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(Z=k) &= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathrm{P}\big((X=i)\cap(Y=k-i)\big) \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathrm{P}(X=i)\times\mathrm{P}(Y=k-i) && \text{par indépendance de } X \text{ et } Y \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} \mathrm{P}(X=i)\times\mathrm{P}(Y=k-i) && \text{car } \mathrm{P}(Y=k-i)\neq 0 \iff k-i\geq 1 \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} (1-p)^{i-1}p(1-p)^{k-i-1}p \\
&= p^2(1-p)^{k-2}\sum_{i=1}^{k-1} 1 \\
&= p^2(1-p)^{k-2}(k-1)
\end{aligned}$$

• Notons $D = X-Y$. On a alors $D(\Omega) = \mathbb{Z}$. D'après la formule des probabilités totales associées au SCE $(Y=j)_{j\in\mathbb{N}^*}$

$$\begin{aligned}
\forall k\in\mathbb{N},\qquad \mathrm{P}(D=k) &= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathrm{P}\big((X=k+i)\cap(Y=i)\big) \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathrm{P}(X=k+i)\times\mathrm{P}(Y=i) && \text{par indépendance de } X \text{ et } Y \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} (1-p)^{k+i-1}p(1-p)^{i-1}p \\
&= p^2(1-p)^{k-2}\sum_{i=1}^{\infty}(1-p)^{2i} \\
&= p^2(1-p)^{k-2}\sum_{i=1}^{\infty}\big((1-p)^2\big)^i \\
&= p^2(1-p)^{k-2}\sum_{j=0}^{\infty}\big((1-p)^2\big)^{j+1} \\
&= p^2(1-p)^{k}\sum_{j=0}^{\infty}\big((1-p)^2\big)^{j} \\
&= p^2(1-p)^k\frac{1}{1-(1-p)^2} && \text{car } \left|(1-p)^2\right|<1 \\
\forall k\in\mathbb{Z}_-^*,\qquad P(D=k) &= \mathrm{P}(X-Y=k) \\
&= \mathrm{P}(Y-X=-k) \\
&= p^2(1-p)^k\frac{1}{1-(1-p)^2} && \text{car } X \text{ et } Y \text{ jouent des rôles symétriques et } -k\in\mathbb{N}
\end{aligned}$$

Finalement, pour tout k dans $\mathbb{Z}$, $\quad \mathrm{P}(D=k) = \dfrac{p^2(1-p)^k}{1-(1-p)^2} = \dfrac{p(1-p)^k}{2-p}$