Applications linéaires

Exercices d'application directe du cours

Exercice 1 (Montrer qu'une application est linéaire)

Montrer que les applications suivantes sont des applications linéaires, puis donner leur noyau et leur image, précisez quand elles sont injective ou surjectives, et donner leur matrice dans les bases canoniques :

Rappel de méthode utile dans la majorité des cas :

① On vérifie que ces applications conservent les applications linéaires.

② On commence par déterminer le noyau de l'application en résolvant $f(u) = 0$
(notation de u à adapter en fonction de l'espace dans lequel on travaille)

③ On en déduit la dimension du noyau, puis celle de l'image, par application du théorème du rang.

④ Sauf cas particuliers évidents, on obtient l'image en cherchant l'espace vectoriel engendré par les images des vecteurs de base de l'espace de départ.

⑤ On "écrème" proprement le Vect pour ne conserver plus que le nombre de vecteurs correspondant à la dimension voulue (celle déterminée dans le deuxième point).

⑥ On met en colonne dans une matrice les images de vecteurs de la base canonique de l'espace de départ déjà calculés en point ④

1. **a.** $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3;\ (x, y) \mapsto (x,\ 2x-3y,\ x+4y)$
   b. $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3;\ (x, y) \mapsto (-x+y,\ x-y,\ 2x+2y)$
   c. $h = 2f - 3g$
2. On suppose que f est une application linéaire définie sur $\mathbb{R}^3$, muni de sa base canonique $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique (e_1, e_2), telle que $f(\varepsilon_1) = e_1 - 2e_2$, $f(\varepsilon_2) = 3e_1$ et $f(\varepsilon_3) = 2e_1 + e_2$. Déterminer $f(x, y, z)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
3. $f : \mathbb{R}^4 \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R});\ (x, y, z, t) \mapsto \begin{pmatrix} 2x-t & y+t \\ 3x+z & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 2 (Recherche de l'image d'une application linéaire)

Soit g l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ défini par $g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -2x+y+z \\ x-2y+z \\ x+y-2z \end{pmatrix}$. Déterminer $\mathrm{Im}(g)$.

Exercice 3 (Montrer qu'une application est un endomorphisme)

1. On considère les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   Montrer que l'application φ définie pour toute matrice M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par $\varphi(M) = AM - MB$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Déterminer sa matrice dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Que peut-on en déduire quand à la bijectivité de φ ?
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et f l'application définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $f(M) = AMA$.
   Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Que peut-on dire si A est inversible ?

Exercice 4 (Composées)

Soient f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $f\big((x, y)\big) = (x-2y, x, 3x+y)$ et g l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $g\big((x, y, z)\big) = (x+3y+2z, -2x+z)$.

1. Déterminer l'application $g \circ f$ et montrer que c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
2. Qu'en est-il de l'application $f \circ g$?
3. Retrouver ces résultats en se servant des matrices d'applications linéaires.

Exercice 5 (matrice d'application linéaire et calcul de $f \circ f$)

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$f(x, y, z) = (z + y - x, x + z - y, x + y - z).$$

1. Écrire la matrice A de f dans la base standard $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la matrice de $f \circ f$ de deux façons différentes :
   a. en calculant les images par $f \circ f$ des vecteurs de la base standard
   b. en calculant le produit A^2.
3. En déduire une expression $f \circ f(x, y, z)$ pour tout (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 6 (Application linéaire canoniquement associée à une matrice)

Dans chaque cas, déterminer l'application linéaire f canoniquement associée à la matrice A : **1.** $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **2.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 5 & -4 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 7 (Savoir utiliser la matrice d'une application linéaire)

1. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base standard est $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&2&3\\-1&0&-1\end{pmatrix}$.
   - **a.** Calculer $f(2,3,-1)$, puis $f(0,1,5)$.
   - **b.** Résoudre l'équation $f(x,y,z)=(2,1,3)$.
   - **c.** Déterminer $\mathrm{Im} f$.
   - **d.** Déterminer $\mathrm{Ker} f$.
2. Soit E un espace vectoriel ayant pour base $\mathscr{B}=(e_1,e_2,e_3)$.
   Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est $C=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}$.
   - **a.** Calculer $f(e_1+2e_2)$, $f(2e_3-3e_1)$.
   - **b.** Résoudre l'équation $f(x)=e_1+e_2$, puis $f(x)=2e_1+e_2+e_3$, où x est un élément de E.
   - **c.** Déterminer $\mathrm{Im} f$.
   - **d.** Déterminer $\mathrm{Ker} f$.

Exercice 8 (Utilisation d'un polynôme annulateur pour calculer l'inverse d'une matrice)

Montrer que $P=X^2-5X+4$ est un polynôme annulateur de $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$
En déduire que A est inversible, puis donner A^{-1}.

Exercice 9 (Utilisation des formules de changement de base)

On considère les vecteurs de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ suivants : $u=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $v=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ et $w=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$.

Soit g l'endomorphisme de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ défini par : $g\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}-2x+y+z\\x-2y+z\\x+y-2z\end{pmatrix}$

En supposant admis le fait que la famille $\mathscr{B}$ est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, déterminer la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g)$ de l'endomorphisme g dans la base $\mathscr{B}$.

Exercice 10 (Savoir écrire la matrice d'un endomorphisme dans une base)

1. Soient $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathscr{B}_1$.
   Soient $u=(1,0,1)$, $v=(-1,1,0)$, $w=(0,1,2)$. On admettra que $\mathscr{C}_1=(u,v,w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$
   - **a.** Donner la matrice de passage $P_1=\mathscr{P}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{C}_1}$ de la base canonique $\mathscr{B}_1$ de $\mathbb{R}^3$ à la base $\mathscr{C}_1$.
   - **b.** Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. On note A sa matrice dans la base standard et B sa matrice dans la base $\mathscr{C}_1$.
     Exprimer B en fonction de A, P_1 et P_1^{-1}.
   - **c.** Application : Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $f(x,y,z)=(-2x+2y-4z,-3x+3y-4z,3x-y+6z)$.
     Déterminer la matrice de f dans la base $\mathscr{C}_1$.
2. Soient $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ muni de sa base canonique $\mathscr{B}_3$.
   Soient $M_1=\begin{pmatrix}1&-1\\1&4\end{pmatrix}, M_2=\begin{pmatrix}1&1\\1&4\end{pmatrix}, M_3=\begin{pmatrix}1&-1\\2&4\end{pmatrix}, M_4=\begin{pmatrix}0&-1\\1&4\end{pmatrix}$. On admettra que $\mathscr{C}_3=(M_1,M_2,M_3,M_4)$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
   - **a.** Donner la matrice de passage $P_3=\mathscr{P}_{\mathscr{B}_3,\mathscr{C}_3}$ de la base canonique $\mathscr{B}_3$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ à sa base $\mathscr{C}_3$.
   - **b.** Soit f un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ ayant pour matrice G dans la base standard et H dans la base $\mathscr{C}_3$.
     - **i.** On suppose que H est inversible. Que peut-on dire de G ?
     - **ii.** Donner une lien entre G, H et P_3.
     - **iii.** On suppose que $H^3+2H+I=0$. En déduire une relation vérifiée par f, puis une relation vérifiée par G.
     - **iv.** Soit $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $G-\lambda I$ n'est pas inversible. Que peut-on en déduire pour $f-\lambda id$, puis pour $H-\lambda I$?
     - **v.** Quelle sera la matrice de f^n dans la base standard ? dans la base $\mathscr{C}_3$?
       Établir enfin un lien entre ces deux matrices.

Exercices d'approfondissement

Exercice 11 (Montrer qu'une application est linéaire)

Montrer que les applications suivantes sont des applications linéaires, déterminer leur noyau, leur rang, leur image et donner leur matrice dans les bases canoniques adaptées :

1. $f:\mathbb{R}_2[X]\to\mathbb{R}_3[X];\ P\mapsto 2P'-XP$
2. $\star$ φ l'application définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par $\varphi(P)=Q$ avec Q le polynôme défini par $Q(x)=P(x+1)-P(x)$
3. $Tr:\mathscr{M}_3(\mathbb{R})\to\mathbb{R};\ M\mapsto m_{1,1}+m_{2,2}+m_{3,3}$ *NB : cette application appelée Trace possède certaines propriétés hors-programme*
4. Montrer que l'application f définie pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_2[X]$ par $f(P)=X^2P'-2XP$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 12 (Exercice abstrait)

Soit E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E tel que : $f^2 - 2f = 0$

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(f - 2Id) = \mathrm{Im}(f)$
2. Si de plus E est de dimension finie, montrer que $\mathrm{Im}(f - 2Id) = \mathrm{Ker}(f)$

Exercice 13 (Calcul de A^n via l'endomorphisme associé)

En considérant A comme la matrice d'un endomorphisme f d'un espace vectoriel E muni d'une base $\mathscr{B}$, calculer A^2, A^3, A^n, avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. *Rq : le calcul de A^n pourrait se faire directement, notamment par récurrence.*

Exercice 14 (Savoir utiliser la matrice d'une application linéaire)

1. Soient $P = 1 - 3X + X^2$, $Q = 1 + 3X$, $R = 1 + X + X^2 + X^3$, $S = 1$. $\mathscr{C}_2 = (P, Q, R, S)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

   Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ dont la matrice dans la base $\mathscr{C}_2$ est $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 6 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

   a. Calculer $f(2 + X^2)$, $f(2 + 4X + X^2 + X^3)$, $f(4 + X + 2X^2 + X^3)$.

   b. Résoudre l'équation $f(Y) = 2 + 3X$, puis $f(Y) = 2 - 3X + X^2$.

   c. Déterminer $\mathrm{Im} f$.

   d. Déterminer $\mathrm{Ker} f$.

2. Soient $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, M_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.
   La famille $\mathscr{C}_3 = (M_1, M_2, M_3, M_4)$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

   Soit f l'endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ dont la matrice dans la base $\mathscr{C}_3$ est $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   a. Calculer $f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   b. Résoudre l'équation $f(M) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, puis $f(M) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, où M est une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

   c. Déterminer $\mathrm{Im} f$.

   d. Déterminer $\mathrm{Ker} f$.

Exercice 15 (Matrice d'endomorphisme relativement à une base particulièrement adaptée ⋆)

Soit E un espace vectoriel de dimension 3. Soit u un endomorphisme de E tel qu'il existe un vecteur x de E tel que $u^2(x) \neq 0$ mais $u^3(x) = 0$.

1. Montrer que $\big(x, u(x), u^2(x)\big)$ est une base de E.
2. Déterminer la matrice de l'endomorphisme u dans la base $\mathscr{B} = \big(x, u(x), u^2(x)\big)$.
3. u est-il bijectif ?
4. Déterminer la matrice de l'endomorphisme $3u^2 - 2u + \mathrm{id}$ dans la base $\mathscr{B}$.
5. Soit $v = \mathrm{id} + 2u$. Montrer que v est bijectif et déterminer la matrice de l'endomorphisme v^{-1} dans la base $\mathscr{B}$.

Exercices tirés d'annale

Exercice 16 (d'après EML 2010)

Partie I : Un endomorphisme de l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2

- On note $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2.
- On note : $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- On note $\mathscr{S}_2$ l'ensemble des matrices carrées symétriques d'ordre 2.

1. Calculer AFA, AGA, AHA.
2. Montrer que $\mathscr{S}_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et que (F, G, H) est une base de $\mathscr{S}_2$. Déterminer la dimension de $\mathscr{S}_2$.
   On note u l'application qui, à chaque matrice S de $\mathscr{S}_2$, associe la matrice $u(S) = ASA$.
3. **a.** Montrer : $\forall S \in \mathscr{S}_2, u(S) \in \mathscr{S}_2$.

   b. Montrer que u est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathscr{S}_2$.

   c. Donner la matrice de u dans la base (F, G, H) de $\mathscr{S}_2$.

Partie 2 : Réduction d'une matrice carrée d'ordre 3 - VO

On note : $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $M=\begin{pmatrix}0&0&4\\0&4&6\\4&12&9\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}-4&0&0\\0&1&0\\0&0&16\end{pmatrix}$.

1. Vérifier que -4, 1, 16 sont valeurs propres de M et déterminer, pour chacunes de celles-ci, une base du sous-espace propre associé. Est-ce que M est diagonalisable ?
2. Déterminer une matrice P carrée d'ordre 3, inversible, de première ligne égale à $\begin{pmatrix}4&4&1\end{pmatrix}$, telle que $M=PDP^{-1}$.
3. Vérifier que $(D+4I)(D-I)(D-16I)$ est la matrice nulle.
4. En déduire : $M^3=13M^2+52M-64I$.
5. Établir : $u^3=13u^2+52u-64e$, où e désigne l'application indentité de $\mathscr{S}_2$ et où u a été définie dans la partie I.

Partie 2 : Réduction d'une matrice carrée d'ordre 3 - VOST

1. Résoudre les systèmes $(M-\lambda I)X=0$ avec $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et λ valant successivement -4, 1 et 16 et exprimer les solutions sous la forme d'une espace vectoriel engendré par un vecteur non nul.
2. Déterminer la matrice de passage de la base canonique à la base formée par les trois vecteurs engendrant les espaces trouvés dans la question précédente.
3. voir énoncé initial
4. voir énoncé initial
5. voir énoncé initial

Exercice 17 (d'après EML 2004 (les cubes pourront travailler avec l'énoncé original))

On note $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre trois à coefficients réels, I la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, et 0 la matrice nulle de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Pour toute matrice A de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, on considère les ensembles $E_1(A)$ et $E_2(A)$ suivants :

$$E_1(A)=\{M\in\mathscr{M}_3(\mathbb{R}) : AM=M\} \quad \text{et} \quad E_2(A)=\{M\in\mathscr{M}_3(\mathbb{R}) : A^2M=AM\}.$$

Partie I.

1. Montrer que $E_1(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. On admettra que $E_2(A)$ est aussi un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
2. a. Montrer que $E_1(A)\subset E_2(A)$.
   b. Montrer que si A est inversible, alors $E_1(A)=E_2(A)$.
3. Montrer que si $A-I$ est inversible, alors $E_1(A)=\{0\}$.
4. Un exemple : soit $B=\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&-1&1\\0&0&2\end{pmatrix}$. Déterminer $E_1(B)$ et $E_2(B)$.

Partie II.

On considère la matrice $C=\begin{pmatrix}3&-2&-1\\1&0&-1\\2&-2&0\end{pmatrix}$.

5. a. En effectuant des opérations de Gauss à partir de $C-\lambda I$, obtenir une matrice triangulaire supérieure permettant de trouver pour quels réels λ la matrice $C-\lambda I$ n'est pas inversible.
   b. Résoudre $CX=0$ où $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Montrer que l'ensemble F des solutions de cette équation est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et en donner une base et la dimension.
   c. Résoudre $CX=X$ où $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Montrer que l'ensemble G des solutions de cette équation est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et en donner une base et la dimension.
   d. Résoudre $CX=2X$ où $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Montrer que l'ensemble H des solutions de cette équation est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et en donner une base et la dimension.
   e. En posant $P=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$, Déterminer $D=P^{-1}CP$.
   f. Compléter le programme python en utilisant la commande `np.ones` afin d'obtenir la matrice P :

```
P=...............
P[1,2]=........
P[.,.]=0
```

6. Soit $M\in\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. On note $N=P^{-1}M$.
   a. Montrer que $M\in E_1(C)\Leftrightarrow N\in E_1(D)$.
   b. Pour cette question, on admettra que D est la matrice diagonale diag$(0,1,2)$.
   Montrer que $N\in E_1(D)$ si et seulement s'il existe trois réels a, b et c tels que l'on ait $N=\begin{pmatrix}0&0&0\\a&b&c\\0&0&0\end{pmatrix}$.
7. En déduire une expression générale des éléments de $E_1(C)$ et déterminer une base et la dimension de $E_1(C)$.

Quelques calculs sur le binôme de Newton, version matricielle

Exercice 18

En utilisant la formule du binôme de Newton, calculer les puissances n des matrices suivantes, pour $n \in \mathbb{N}$.
Méthode :

① On décompose A en la somme de deux matrices N et J bien choisies (pour savoir comment bien les choisir, lire ce qui suit...)

② Vérifier que N est nilpotente (en calculant ses puissances successives, on trouve un rang à partir duquel elle sont toutes nulles)

③ **Remarquer que les matrices N et J commutent** (J étant souvent l'identité ou une matrice scalaire, il suffit simplement de le dire, sinon, le vérifier par un calcul)

④ Utiliser la formule du binôme

⑤ Réduire la somme grâce au rang trouvé en point ②

⑥ Finir les calculs.

⑦ Éventuellement, expliciter les différents coefficients de la matrice A^n

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

3. $A = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$