Applications linéaires - Éléments de correction

Exercices d'application directe du cours

Exercice 1 (Montrer qu'une application est linéaire)

1. **a.** $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3;\ (x,y)\mapsto(x,\ 2x-3y,\ x+4y)$

- Montrons que l'application $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3;\ (x,y)\mapsto(x,\ 2x-3y,\ x+4y)$ est une application linéaire :
  $\forall(u,u')\in\mathbb{R}^2,\ u=(x,y)$ et $u'=(x',y')$ et $\lambda\in\mathbb{R}$, alors on a : $\lambda u+u'=(\lambda x+x',\lambda y+y')$

$$\begin{aligned} f(\lambda u+u') &= \big((\lambda x+x'),\ 2(\lambda x+x')-3(\lambda y+y'),\ (\lambda x+x')+4(\lambda y+y')\big)\\ &= \lambda(x,\ 2x-3y,\ x+4y)+(x',\ 2x'-3y',\ x'+4y')\\ &= \lambda f(u)+f(u') \end{aligned}$$

  Donc f est bien une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$.

- Détermination du noyau : $f(x,y)=(0,0,0)\ \Leftrightarrow\ \left\{\begin{smallmatrix} x=0\\ 2x-3y=0\\ x+4y=0\end{smallmatrix}\right.\ \Leftrightarrow\ (x,y)=(0,0)$ d'où $\text{Ker}(f)=\{0\}$ (f injective)
- Donc $\dim\big(\text{Ker}(f)\big)=0$
  et d'après le théorème du rang, $\dim(\mathbb{R}^2)=2=\dim\big(\text{Ker}(f)\big)+\dim\big(\text{Im}(f)\big)$ d'où $\text{rg}(f)=\dim\big(\text{Im}(f)\big)=2$
- $f\big((1,0)\big)=(1,2,1)$ et $f\big((0,1)\big)=(0,-3,4)$ d'où $\text{Im}(f)=\text{Vect}\big((1,2,1),(0,-3,4)\big)$, ce qui correspond à la dimension voulue.
- $A=\begin{pmatrix}1&0\\2&-3\\1&4\end{pmatrix}$

b. $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3;\ (x,y)\mapsto(-x+y,\ x-y,\ 2x+2y)$
On procède de même : g est linéaire, $\text{Ker}(g)=\{0\}$ (g injective), $\text{rg}(g)=2$ et $\text{Im}(g)=\text{Vect}\big((-1,1,2),(1,-1,2)\big)$ et $B=\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\\2&2\end{pmatrix}$

c. $h=2f-3g$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ comme combinaison d'applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$, $\mathscr{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^3)$ étant un espace vectoriel.
Pour le reste, on procède de même : $\text{Ker}(h)=\{0\}$ (h injective) $rg(h)=2$ et $\text{Im}(h)=\text{Vect}\big((5,1,-4),(-3,-3,2)\big)$
et $C=2A-3B=\begin{pmatrix}5&-3\\1&-3\\-4&2\end{pmatrix}$ (d'après le paragraphe **3.3.1** du cours)

2. f définie sur $\mathbb{R}^3$, muni de sa base canonique $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique (e_1,e_2), telle que $f(\varepsilon_1)=e_1-2e_2$, $f(\varepsilon_2)=3e_1$ et $f(\varepsilon_3)=2e_1+e_2$.

- Tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ se décompose sous la forme $x\varepsilon_1+y\varepsilon_2+z\varepsilon_3$ et son image par f vaut donc :
  $f(x\varepsilon_1+y\varepsilon_2+z\varepsilon_3)\underset{f\text{ linéaire}}{=}xf(\varepsilon_1)+yf(\varepsilon_2)+zf(\varepsilon_3)=x(e_1-2e_2)+y(3e_1)+z(2e_1+e_2)=(x+3y+2z)e_1+(-2x+z)e_2$
  D'où f est l'application suivante : $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2;\ (x,y,z)\mapsto(x+3y+2z,\ -2x+z)$
- Détermination du noyau : $f(x,y,z)=(0,0)\ \Leftrightarrow\ \left\{\begin{smallmatrix}x+3y+2z=0\\ -2x+z=0\end{smallmatrix}\right.\ \Leftrightarrow\ \left\{\begin{smallmatrix}3y=-5x\\ z=2x\end{smallmatrix}\right.$ d'où $\text{Ker}(f)=\text{Vect}\big(3,-5,6\big)$
- Donc $\dim\big(\text{Ker}(f)\big)=1$ et d'après le théorème du rang, $\dim\mathbb{R}^3=3=\dim\big(\text{Ker}(f)\big)+\dim\text{Im}(f)$ d'où $\text{rg}(f)=\dim\big(\text{Im}(f)\big)=2$
- $f\big((1,0,0)\big)=(1,-2)$, $f\big((0,1,0)\big)=(3,0)$ et $f\big((0,0,1)\big)=(2,1)$, d'où $\text{Im}(f)=\text{Vect}\big((1,-2),(3,0),(2,1)\big)$.
- Or $\dim\big(\text{Im}(f)\big)=2$, on peut donc exprimer $\text{Im}(f)$ comme espace vectoriel engendré d'une famille de deux vecteurs.
  Puisque $(3,0)=\frac{3}{5}(1,-2)+\frac{6}{5}(2,1)$, on peut dire que $\text{Im}(f)=\text{Vect}\big((1,-2),(2,1)\big)=\mathbb{R}^2$ et on remarque au passage que f est surjective.
- $A=\begin{pmatrix}1&3&2\\-2&0&1\end{pmatrix}$

3. $f:\mathbb{R}^4\to\mathscr{M}_2(\mathbb{R});\ (x,y,z,t)\mapsto\begin{pmatrix}2x-t&y+t\\3x+z&0\end{pmatrix}$
Montrons que $f:\mathbb{R}^4\to\mathscr{M}_2(\mathbb{R});\ (x,y,z,t)\mapsto\begin{pmatrix}2x-t&y+t\\3x+z&0\end{pmatrix}$ est une application linéaire.
$\forall(u,u')\in\mathbb{R}^2,\ u=(x,y,z,t)$ et $u'=(x',y',z',t')$ et $\lambda\in\mathbb{R}$, alors on a : $\lambda u+u'=(\lambda x+x',\lambda y+y',\lambda z+z',\lambda t+t')$ et :
$f(\lambda u+u')=\begin{pmatrix}2(\lambda x+x')-(\lambda t+t')&(\lambda y+y')+(\lambda t+t')\\3(\lambda x+x')+(\lambda z+z')&0\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}2x-t&y+t\\3x+z&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2x'-t'&y'+t'\\3x'+z'&0\end{pmatrix}=\lambda f(u)+f(u')$
Donc f est bien une application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
Pour le reste, même méthode. On trouve :
$\text{Ker}(f)=\text{Vect}\big((1,-2,-3,2)\big)$ $\text{rg}(f)=3$ et $\text{Im}(f)=\text{Vect}\big(\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\end{pmatrix}\big)$ et $A=\begin{pmatrix}2&0&0&-1\\0&1&0&1\\3&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

Exercice 2 (Recherche de l'image d'une application linéaire)

Soit g l'endomorphisme de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ défini par $g\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}-2x+y+z\\x-2y+z\\x+y-2z\end{pmatrix}$. Déterminer $\text{Im}(g)$.

On trouve que $\text{Im}(g)=\text{Vect}\left(\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}\right)$.
En remarquant que $\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, et que $\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires, on en déduit que $\left(\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}\right)$ forme une base de $\text{Im}(f)$ et donc que $\text{Im}(g)=\text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}\right)$

Exercice 3 (Montrer qu'une application est un endomorphisme)

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\varphi(M) = AM - MB$
   On remarque que par produit matriciel, pour toute matrice M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\varphi(M) = AM - MB \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   Donc φ est bien une application qui va de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   Montrons ensuite que φ est linéaire. Considérons deux matrices M et N de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et un réel λ.
   $\varphi(\lambda M + N) = A(\lambda M + N) - (\lambda M + N)B$
   Par propriétés matricielles, on a $\varphi(\lambda M + N) = \lambda(AM - MB) + (AN - NB) = \lambda\varphi(M) + \varphi(N)$.
   Donc φ est bien une application linéaire de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. C'est donc un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   NB : Ce résultat aurait été prouvé qu'elles qu'aient été les allures des matrices A et B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
   Après calculs, puisque $\varphi(E_{1,1}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\varphi(E_{1,2}) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\varphi(E_{2,1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\varphi(E_{2,2}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$,
   Alors $\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Puisque cette matrice est triangulaire supérieure et qu'il n'y a aucun 0 sur sa diagonale, on peut en déduire que φ est un endomorphisme bijectif.

2. • Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et f l'application définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $f(M) = AMA$.
   Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se justifie de la même manière que dans la question précédente.
   • Si A est inversible, l'application g définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $g(M) = A^{-1}MA^{-1}$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $f \circ g = g \circ f = id_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ donc f est un isomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (automorphisme de de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour les intimes, même si ce mot est hors-programme) et son isomorphisme réciproque est g.
   • Autre méthode : si on a avancé dans le cours au delà du paragraphe **1.3.5**, il est aussi possible de montrer que $Ker f = \{0_n\}$ pour prouver que f est injective, et si on a avancé dans le cours au delà du paragraphe **2.3**, on concluera en disant que puisqu'on est en dimension finie et que les espaces de départ et d'arrivée sont de même dimension, l'injectivité de f implique automatiquement la bijectivité de f.

Exercice 4 (Composées)

Soient f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $f\big((x,y)\big) = (x-2y, x, 3x+y)$ et g l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $g\big((x,y,z)\big) = (x+3y+2z, -2x+z)$.

1. $g \circ f$ est bien une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ et pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:
   $g \circ f(x,y) = g\big(f(x,y)\big) = \big((x-2y) + 3(x) + 2(3x+y)\ ,\ -2(x-2y) + (3x+y)\big) = (10x\ ,\ x+5y)$
   On montre facilement comme dans l'ex 1, item **1.** que $g \circ f$ est une application linéaire donc finalement, l'application $g \circ f$ est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
   Autre méthode : par application du paragraphe **1.2.3.** du cours, on peut prouver que f et g étant des applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ respectivement, alors $g \circ f$ est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
2. On montre de même que $f \circ g$ est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ définit par $f(x,y,z) = (5x+3y\ ,\ x+3y+2z\ ,\ x+9y+7z)$
3. **a.** La matrice de f relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ est : $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ et a matrice de g relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ est : $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   La matrice de $g \circ f$ relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est donc $BA = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, ce qui correspond à l'expression de $g \circ f(x,y)$ trouvée dans l'ex 3.

   b. La matrice de $f \circ g$ relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est donc $AB = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 9 & 7 \end{pmatrix}$, ce qui correspond à l'expression de $g \circ f(x,y,z)$ trouvée dans l'exercice 3.

Exercice 5 (matrice d'application linéaire et calcul de $f \circ f$)

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $\qquad f(x,y,z) = (z+y-x, x+z-y, x+y-z)$

1. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$
2. **a.** $f^2(e_1) = f\big(f(e_1)\big) = f(-e_1+e_2+e_3) = -f(e_1) + f(e_2) + f(e_3) = 3e_1 - e_2 - e_3$
   $f^2(e_2) = -e_1 + 3e_2 - e_3$
   $f^2(e_3) = -e_1 - e_2 + 3e - 3$
   d'où $\quad \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^2) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

   b. $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.
3. Donc pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $f \circ f(x,y,z) = (3x - y - z, -x + 3y - z, -x - y + 3z)$

Exercice 6 (Application linéaire canoniquement associée à une matrice)

1. Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, alors l'application linéaire canoniquement associée à A est $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3; (x,y) \mapsto (2x, -x+3y, y)$
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 5 & -4 & 0 \end{pmatrix}$, alors l'application linéaire canoniquement associée à A est $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2; (x,y,z) \mapsto (x+2y-z, 5x-4y)$

Exercice 7 (Savoir utiliser la matrice d'une application linéaire)

1. **a.** $f(2,3,-1)$ s'obtient par le calcul de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

   De même, $f(0,1,5)$ s'obtient par le calcul de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 17 \\ -5 \end{pmatrix}$ D'où $f(2,3,-1) = (5,3,-1)$ et $f(0,1,5) = (17,17,-5)$

   b. Résoudre l'équation $f(x,y,z) = (2,1,3)$ revient à résoudre le système à trois équations et trois inconnues :

   $\begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ \quad\ \ 2y + 3z = 1 \\ -x \qquad - \ z = 3 \end{cases}$ on trouve facilement : $\begin{cases} x = 1 \\ y = -13/2 \\ z = -4 \end{cases}$

   c. $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\big((1,0,-1),(2,2,0),(3,3,-1)\big)$.

   d. Déterminer $\ker f$ revient à trouver les vecteurs colonnes X tels que $AX = 0$. Il s'agit de résoudre : $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ \quad\ \ 2y + 3z = 0 \\ -x \qquad - \ z = 0 \end{cases}$

   On trouve facilement $x = y = x = z = 0$ d'où $\operatorname{Ker} f = \{0\}$.

2. Soit E un espace vectoriel ayant pour base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$.
   Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   a. $f(e_1 + 2e_2)$ est donné par le calcul de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ D'où $f(e_1 + 2e_2) = 3e_1 + 2e_2 + 2e_3$

   $f(2e_3 - 3e_1)$ est donné par le calcul de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ D'où $f(2e_3 - 3e_1) = -e_1$

   b. $f(x) = e_1 + e_2$ se résout en résolvant $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

   Or $\begin{cases} a + b + c = 1 \\ \quad b \quad\ = 1 \\ \quad b \quad\ = 0 \end{cases}$ n'a pas de solution donc cette équation n'a aucune solution.

   $f(x) = 2e_1 + e_2 + e_3$ se résout en résolvant $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

   Or $\begin{cases} a + b + c = 2 \\ \quad b \quad\ = 1 \\ \quad b \quad\ = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + c = 1 \\ \quad b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \alpha \\ b = 1 \\ c = 1 - \alpha \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}$ donc les solutions sont de la forme $x = \alpha e_1 + e_2 + (1-\alpha)e_3$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

   c. En observant la matrice C, il vient $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\big((1,0,0),(1,1,1)\big)$.

   d. $X \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow CX = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ \quad y \quad\ = 0 \\ \quad y \quad\ = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ \quad y = 0 \end{cases}$ d'où $\ker f = \operatorname{Vect}\big((1,0,-1)\big)$.

Exercice 8 (Utilisation d'un polynôme annulateur pour calculer l'inverse d'une matrice)

$A^2 = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

Or $\begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $A^2 - 5A + 4I = 0$, ce qui signifie que P est bien un polynôme annulateur de A.

$$\begin{aligned} A^2 - 5A + 4I = 0 &\Leftrightarrow (A - 5I)A = -4I \\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{4}(A - 5I)A = I \end{aligned}$$

Donc A est inversible et son inverse vaut $\frac{1}{4}(5I - A) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice 9 (Utilisation des formules de changement de base)

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Appelons $\mathscr{B}_C$ la base canonique de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors posons $M = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_C}(g) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Grâce à la méthode de Gauss-Jordan (ou grâce à python ou la calculatrice pour aller plus vite et gagner du temps pour travailler des choses nouvelles), on obtient : $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

D'après la formule du cours, on a, en notant $M' = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(g)$ $\quad M' = P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

Exercice 10 (Savoir écrire la matrice d'un endomorphisme dans une base)

1. Soient $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathscr{B}_1$.
   Soient $u = (1,0,1)$, $v = (-1,1,0)$, $w = (0,1,2)$. On admettra que $\mathscr{C}_1 = (u,v,w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$

   a. $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

b. $B = P_1^{-1} A P_1$

c. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ -3 & 3 & -4 \\ 3 & -1 & 6 \end{pmatrix}$ $\qquad P_1^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad B = \begin{pmatrix} -19 & 24 & -1 \\ -21 & 20 & -11 \\ 14 & -14 & 6 \end{pmatrix}$

2. Soient $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ muni de sa base canonique $\mathscr{B}_3$.
Soient $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, M_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. On admettra que $\mathscr{C}_3 = (M_1, M_2, M_3, M_4)$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

a. $P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

b. Soit f un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ ayant pour matrice G dans la base standard et H dans la base $\mathscr{C}_3$.

i. G est inversible comme produit de matrices inversibles.

ii. $G = PHP^{-1}$ ou $H = P^{-1}GP$

iii. $f^3 + 2f + \mathrm{id} = 0$
Puisque $H^3 = P^{-1}GPP^{-1}GPP^{-1}GP = P^{-1}GIGIGP = P^{-1}G^3P$, $\quad H^3 + 2H + I = 0$ devient $P^{-1}G^3P + 2P^{-1}GP + P^{-1}P = 0$
Ou encore $P^{-1}(G^3 + 2G + I)P = 0$ c'est à dire $G^3 + 2G + I = 0$, après multiplication à gauche par P et à droite par P^{-1}.

iv. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $G - \lambda I$ n'est pas inversible.
Alors $f - \lambda id$ n'est pas bijective, et pour $H - \lambda I$ n'est pas inversible.

v. La matrice de f^n dans la base standard est G^n La matrice de f^n dans la base $\mathscr{C}_3$ est H^n
$G^n = PH^nP^{-1}$

Exercices d'approfondissement

Exercice 11 (Montrer qu'une application est linéaire)

Montrer que les applications suivantes sont des applications linéaires :

1.

- Montrons que $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_3[X];\ P \mapsto 2P' - XP$ est une application linéaire.
  Pour tout P de $\mathbb{R}_2[X]$, les applications $x \mapsto 2P'(x)$ et $x \mapsto xP(x)$ sont des fonctions polynômiales de degré inférieur ou égal à 3, donc leur somme également, et donc $f(P)$ est bien un élément de $\mathbb{R}_3[X]$.
  Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$ et λ un réel. Alors :

$$\begin{aligned} f(\lambda P + Q) &= 2(\lambda P + Q)' + X(\lambda P + Q) \\ &= 2\lambda P' + 2Q' + \lambda XP + XQ && \text{par linéarité de la dérivation} \\ &= \lambda(2P' - XP) + (2Q' - XQ) \\ &= \lambda f(P) + f(Q) \end{aligned}$$

  Donc f est bien une application linéaire de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}_3[X]$.
- On Détermine le noyau de f. Pour tout P appartenant à $\mathbb{R}_2[X]$, il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $P = aX^2 + bX + c$
  Alors $f(P) = -aX^3 - bX^2 + (4a - c)X + 2b$ $\qquad f(P) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -a=0 \\ -b=0 \\ 4a-c=0 \\ 2b=0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 0$
  Donc $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$ (f injective)
- Donc $\dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) = 0$ et par suite d'après le théorème du rang, $\dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3 = \dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) + \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big)$
  d'où $\mathrm{rg}(f) = \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big) = 3$.
- Puisque $f(1) = -X$, $f(X) = 2 - X^2$ et $f(X^2) = 4X - X^3$ alors $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(-X, 2 - X^2, 4X - X^3)$
- L'espace vectoriel étant de la dimension voulue, on peut garder cette expression ou la modifier légèrement par opérations de Gauss : $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(X, X^2 - 2, X^3)$
- Montrer que f est linéaire est similaire à ce qui a été fait dans la question 1. Puisque $f(1) = -X$, $f(X) = 2 - X^2$ et $f(X^2) = 4X - X^3$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

2.

- ⋆ Montrons que l'application φ définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par $\varphi(P) = Q$ avec Q le polynôme défini par $Q(x) = P(x+1) - P(x)$
  Ici, on est obligés de tout décortiquer :
  Pour tout P appartenant à $\mathbb{R}_2[X]$, il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $P = aX^2 + bX + c$. Alors $P(X+1) = a(X+1)^2 + b(X+1) + c$ et $P(X+1) - P(X) = a(X^2 + 2X + 1) + b(X+1) + c - aX^2 - bX - c = 2aX + (a+b)$ $\qquad$ donc f est à valeurs dans $\mathbb{R}_1[X]$
  De même, pour tout R appartenant à $\mathbb{R}_2[X]$, il existe $(a', b', c') \in \mathbb{R}^3$ tels que $R = a'X^2 + b'X + c'$ et on obtient de même :
  $R(X+1) - R(X) = 2a'X + (a' + b')$
  Pour tout λ appartenant à $\mathbb{R}$, $\lambda P + R = (\lambda a + a')X^2 + (\lambda b + b')X + (\lambda c + c')$ et on obtient de même :
  $(\lambda P + R)(X+1) - (\lambda P + R)(X) = 2(\lambda a + a')X + \big((\lambda a + a') + (\lambda b + b')\big)$
  C'est à dire que $\varphi(\lambda P + R) = 2(\lambda a + a')X + \big((\lambda a + a') + (\lambda b + b')\big) = \lambda\big(2aX + (a+b)\big) + \big(2a'X + (a' + b')\big) = \lambda\varphi(P) + \varphi(R)$
  Donc φ est bien une application linéaire de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}_1[X]$.

- On cherche le noyau de φ. En reprenant les mêmes notations que dans le début de l'exercice : $\varphi(P)=0 \Leftrightarrow \left\{\begin{smallmatrix} 2a=0 \\ a+b=0 \end{smallmatrix}\right. \Leftrightarrow a=b=0$
Donc les polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$ faisant partie de $Ker(\varphi)$ n'ont pas de terme de degré 2 ou 1, mais n'ont aucune contrainte concernant le coefficient constant. Ils décrivent donc $\text{Vect}(1)$. D'où $\text{Ker}(\varphi)=\text{Vect}(1)$.
- Donc $\dim \text{Ker}(\varphi)=1$ et par suite d'après le théorème du rang, $\dim \mathbb{R}_2[X]=3=\dim Ker(\varphi)+\dim\big(\text{Im}(\varphi)\big)$ d'où $\dim\big(\text{Im}(\varphi)\big)=2$.
- Puisque $\varphi(1)=0$, $\varphi(X)=1$ et $\varphi(X^2)=2X+1$ alors $\text{Im}(\varphi)=\text{Vect}(0,1,2X+1)$
- Or $\text{Vect}(0,1,2X+1)=\text{Vect}(1,2X+1)=\text{Vect}(1,X)$ car on ne change pas le caractère générateur d'une famille en pratiquant des opérations de Gauss.
Au final, On trouve $\text{Im}(\varphi)=\mathbb{R}_1[X]$. On a au passage montré le résultat suivant : φ est surjective de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}_1[X]$.
- $A=\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$

3. $Tr : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$; $M \mapsto M_{1,1}+M_{2,2}+M_{3,3}$ Soient M et N deux matrices d'ordre 3 et λ un réel.
Le coefficient diagonal de la matrice $\lambda M+N$ est donné par $(\lambda M+N)_{i,i}$ et par propriétés matricielles, on a : $(\lambda M+N)_{i,i}=\lambda M_{i,i}+N_{i,i}$
Alors, par linéarité de la somme, $Tr(\lambda M+N)=\sum_{i=1}^{3}(\lambda M+N)_{i,i}=\lambda\sum_{i=1}^{3}M_{i,i}+\sum_{i=1}^{3}N_{i,i}=\lambda Tr(M)+Tr(N)$
Donc l'application Trace est linéaire de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.
NB : une application linéaire telle que Trace, définie sur un espace vectoriel, et à valeurs dans $\mathbb{R}$, est appelée **forme linéaire.**
$A=(1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1)$
4. Soit l'application linéaire f définie pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_2[X]$ par $f(P)=X^2P'+XP$. Déterminer $\text{Im}(f)$.
En déterminant les images de la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$, on trouve que $\text{Im}(f)=\text{Vect}\big((X,2X^2,3X^3)\big)=\text{Vect}\big((X,X^2,X^3)\big)$
La famille (X,X^2,X^3) étant libre comme sous-famille extraite de la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$, et puisqu'elle est génératrice de $\text{Im}(f)$, alors c'est une base de $\text{Im}(f)$.

Exercice 12 (Exercice abstrait)

Soit E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E tel que : $f^2-2f=0$

1. Pour montrer que $\text{Ker}(f-2id)=\text{Im}(f)$, on procède par double inclusion :
• Montrons tout d'abord que $\text{Ker}(f-2id)\subset\text{Im}(f)$
Prenons un élément x de $\text{Ker}(f-2id)$. Il vérifie alors les relations suivantes :
$$\begin{aligned}(f-2\text{id})(x)=0 &\Leftrightarrow f(x)-2x=0\\ &\Leftrightarrow f(x)=2x\\ &\Leftrightarrow f(x)=2x\\ &\Leftrightarrow \tfrac{1}{2}f(x)=x\\ &\Leftrightarrow f\big(\tfrac{1}{2}x\big)=x\end{aligned}$$
Donc x étant égale à l'image par f d'un vecteur ($\frac{1}{2}x$ en l'occurence), $x\in\text{Im}(f)$ CQFD
• Montrons maintenant que $\text{Im}(f)\subset\text{Ker}(f-2id)$
Prenons un élément y de $\text{Im}f$ et montrons qu'il appartient à $\text{Ker}(f-2if)$.
Dire que $y\in\text{Im}(f)$ revient à dire qu'il existe un vecteur x de E tel que $y=f(x)$. On aimerait que l'image par $f-2id$ de cet y s'annule.
Or $(f-2id)(y)=f(y)-2y=f\big(f(x)\big)-2f(x)=f^2(x)-2f(x)=0$ puisque $f^2-2f=0$ CQFD
2. Si de plus E est de dimension finie, pour montrer l'égalité entre les deux espaces vectoriels demandés, on montre de la même manière tout d'abord une inclusion : $\text{Im}(f-2id)\subset\text{Ker}(f)$ et on applique ensuite le théorème du rang pour prouver l'égalité des dimensions de ces deux ev car pour deux espaces vectoriels, une inclusion et l'égalité des dimensions suffit pour prouver que l'on a égalité des espaces vectoriels.

Exercice 13 (Calcul de A^n via l'endomorphisme associé)

Considérant A comme la matrice d'un endomorphisme f d'un espace vectoriel E muni d'une base $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3,e_4)$,avec $A=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}$,
on obtient : $f(e_1)=e_2$ $f(e_2)=e_3$ $f(e_3)=e_4$ et $f(e_4)=e_4$
Alors $f^2(e_1)=f\big(f(e_1)\big)=f(e_2)=e_3$ $f^2(e_2)=e_4$ $f^2(e_3)=e_4$ et $f^2(e_4)=e_4$ d'où $A^2=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&1&1\end{pmatrix}$
En a aussi $f^3(e_1)=f\big(f^2(e_1)\big)=f(e_3)=e_4$ $f^3(e_2)=e_4$ $f^3(e_3)=e_4$ et $f^3(e_4)=e_4$ d'où $A^3=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&1&1&1\end{pmatrix}$
D'où pour tout $n\geq 3$, $f^n(e_1)=f\big(f^2(e_1)\big)=f(e_3)=e_4$ $f^n(e_2)=e_4$ $f^n(e_3)=e_4$ et $f^n(e_4)=e_4$ d'où $A^n=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&1&1&1\end{pmatrix}$

Exercice 14 (Savoir utiliser la matrice d'une application linéaire)

1. a. $2+X^2=P+Q$ donc calculer $f(2+X^2)$ revient à effectuer le produit matriciel $B\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ Le calcul donnant $\begin{pmatrix}4\\2\\6\\6\end{pmatrix}$, il ne reste plus qu'à effectuer le calcul de $4P+2Q+6R+6S$ pour obtenir que $f(2+X^2)=6X^3+10X^2+18$

De même, avec $2+4X+X^2+X^3=R+Q$ et $B\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\3\\5\\9\end{pmatrix}$ d'où $f(2+4X+X^2+X^3)=4P+3Q+5R+9S=5X^2+9X^2+2X+21$

De même, avec $4+X+2X^2+X^3=P+Q+R+S$ et $B\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\6\\11\\8\end{pmatrix}$ d'où $f(4+X+2X^2+X^3)=11X^2+16X^2+22X+30$

b. Puisque $2+3x=Q+S$, résoudre l'équation $f(Y)=2+3X$ revient à résoudre le système $\begin{cases} x+3y+z=0\\ 2y+z+3t=1\\ 2x+4y+z+4t=0\\ 6y+3z-t=1\end{cases}$

Or en effectuant la combinaison linéaire $20L_1+11L_2-10L_3-7L_4$, on obtient $0=4$, ce qui est impossible. Il n'existe donc aucun quadruplet (x,y,z,t) qui vérifie le système et donc aucun polynôme Y tel que $P(Y)=2+3X$.
$2+3X$ ne fait donc visiblement pas partie de $\operatorname{Im} f$.
f n'est donc pas surjective puisqu'on a trouvé un élément de l'ev d'arrivée qui n'a pas d'antécédent.
Cela est du au fait que les lignes de B forment une famille liée (raison pour laquelle on a trouvé une combinaison linéaire qui annulait les membres de gauche du système écrit plus haut). Le rang de B est donc strictement inférieur à 4. (et le théorème du rang nous permet de dire que le noyau de f n'est pas réduit au vecteur nul.
De la même manière, on prouve que $f(Y)=2-3X+X^2$ n'a pas de solution.

c.

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} f &= \operatorname{Vect}\big(f(P),f(Q),f(R),f(S)\big)\\ &= \operatorname{Vect}(P+2R\ ,\ 3P+2Q+4R+6S\ ,\ P+Q+R+3S\ ,\ 3Q+4R-S)\\ &= \operatorname{Vect}(2X^3+3X^2-X+3\ ,\ 4X^3+7X^2+X+15\ ,\ X^3+2X^2+X+6\ ,\ 4X^3+4X^2+13X+6)\end{aligned}$$

Vu ce qui a été dit plus haut, on sait que l'on pourrait réduire la famille dans le vect, mais le résultat ci-dessus est tout de même une bonne réponse.

d. Déterminer $\operatorname{Ker} f$ revient à résoudre $\begin{cases} x+3y+z=0\\ 2y+z+3t=0\\ 2x+4y+z+4t=0\\ 6y+3z-t=0\end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} x=-y\\ z=-2y\\ t=0\end{cases}$

Le polynôme générateur de ce ev a donc pour coordonnées $(-1,1,-2,0)$ D'où $\ker f=\operatorname{Vect}(-2X^3-3X^2+4X-2)$

2. Soient $M_1=\begin{pmatrix}1&-1\\1&4\end{pmatrix}, M_2=\begin{pmatrix}1&1\\1&4\end{pmatrix}, M_3=\begin{pmatrix}1&-1\\2&4\end{pmatrix}, M_4=\begin{pmatrix}0&-1\\1&4\end{pmatrix}$.
La famille $\mathscr{C}_3=(M_1,M_2,M_3,M_4)$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
Soit f l'endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ dont la matrice dans la base $\mathscr{C}_3$ est $T=\begin{pmatrix}1&2&-1&3\\0&1&3&-1\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}$.

a. $\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=M_3-M_1$ Calculer $f\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$ revient à calculer $\begin{pmatrix}1&2&-1&3\\0&1&3&-1\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\3\\1\\0\end{pmatrix}$ or $-2M_1+3M_2+M_3=\begin{pmatrix}2&1\\3&8\end{pmatrix}$ donc $f\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\3&8\end{pmatrix}$

De la même manière, $f\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&6\\-6&16\end{pmatrix}$

b. Résoudre l'équation $f(M)=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}$ revient à résoudre $\begin{pmatrix}1&2&-1&3\\0&1&3&-1\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}$ car $\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}=M_3-M_4$

Soit à résoudre $\begin{cases} x+2y-z+3t=0\\ y+3z-t=0\\ z+2t=1\\ t=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=26\\ y=-10\\ z=3\\ t=-1\end{cases}$ d'où $M=26M_1-10M_2+3M_3-M_4=\begin{pmatrix}19&-38\\21&62\end{pmatrix}$

De la même manière, $f(M)=\begin{pmatrix}0&2\\1&0\end{pmatrix}$ a pour solution $M=\begin{pmatrix}6&-8\\9&16\end{pmatrix}$.

c. $\operatorname{Im} f=\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

d. $\operatorname{Ker} f=\{0\}$.

Exercice 15 (Matrice d'endomorphisme relativement à une base particulièrement adaptée ⋆)

E un espace vectoriel de dimension 3. Soit u un endomorphisme de E tel qu'il existe un vecteur x de E tel que $u^2(x)\neq 0$ mais $u^3(x)=0$.

1. Cette famille est constituée de 3 éléments et la dimension est 3 donc il suffit de prouver que la famille est libre.
On résout alors l'équation de liberté : $\alpha x+\beta u(x)+\gamma u^2(x)=0 \quad (\star)$

En composant cette égalité $(\star)$ par u, on obtient que $\alpha u(x)+\beta u^2(x)+\gamma u^3(x)=0$
Or $u^3(x)=0$ donc on a $\alpha u(x)+\beta u^2(x)=0 \quad (\star\star)$
On recompose $(\star\star)$ par u et on obient : $\alpha u^2(x)+\beta u^3(x)=0$, ce qui donne $\alpha u^2(x)=0$.
Mais puisque $u^2(x)\neq 0$, alors on a $\alpha=0$, puis en reportant dans $(\star\star)$, $\beta=0$, et enfin en reportant dans $(\star)$, on a $\gamma=0$.
Donc la famille est libre, et donc c'est une base de E.

2. La matrice N de l'endomorphisme u dans la base $\mathscr{B}=\left(x,u(x),u^2(x)\right)$ est : $N=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$.
3. u n'est-il pas bijectif car sa matrice est une matrice triangulaire supérieure avec des zéros sur la diagonale.
4. La matrice de l'endomorphisme $3u^2-2u+id$ dans la base $\mathscr{B}$ est déterminée par $M=3N^2-2N+I$, ce qui après calculs donne $M=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\3&-2&1\end{pmatrix}$.
5. La matrice de v est déterminée par $I+2N=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&2&1\end{pmatrix}$.
On calcule par réduite de Gauss l'inverse de cette matrice, ce qui donnera la matrice de l'endomorphisme v^{-1} dans la base $\mathscr{B}$.
On trouve $\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\4&-2&1\end{pmatrix}$.

Exercices tirés d'annale

Exercice 17 (d'après EML 2004)

Enoncé enrichi avec indications

On note $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre trois à coefficients réels, I la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, et 0 la matrice nulle de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
Pour toute matrice A de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, on considère les ensembles $E_1(A)$ et $E_2(A)$ suivants :

$$E_1(A)=\{M\in\mathscr{M}_3(\mathbb{R}) : AM=M\} \qquad \text{et} \qquad E_2(A)=\{M\in\mathscr{M}_3(\mathbb{R}) : A^2M=AM\}.$$

Partie I.

1. Montrer que $E_1(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. On admettra que $E_2(A)$ est aussi un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
Démonstration en 3 points. Les deux premiers (dire que l'espace étudié est dans un ev de référence plus grand, et dire que l'ev étudié est non vide car contenant 0 est facile
Pour le troisième point, on considère deux éléments de $E_1(A)$, que l'on appelera par exemple M_1 et M_2 et on montre qu'une combinaison linéaire de ces deux éléments appartient aussi à $E_1(A)$.
2. **a.** Montrer que $E_1(A)\subset E_2(A)$.
on montre que si une matrice quelconque M appartient à $E_1(A)$ alors elle appartient également à $E_2(A)$.
b. Montrer que si A est inversible, alors $E_1(A)=E_2(A)$.
Puisqu'on a déjà montré une inclusion dans la question précédente, on montre l'autre : on montre que si une matrice quelconque M appartient à $E_2(A)$ alors elle appartient également à $E_2(A)$. Pour cela, il faudra dans le raisonnement multiplier à gauche par A^-1
3. Montrer que si $A-I$ est inversible, alors $E_1(A)=\{0\}$.
On traduit le fait que $M\in E_1(A)$, on manipule l'équation pour "mettre tout dans le membre de gauche" et on multiplie à gauche par $(A-I)^{-1}$.
4. Un exemple : soit $B=\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&-1&1\\0&0&2\end{pmatrix}$. Déterminer $E_1(B)$ et $E_2(B)$.
après avoir remarqué que B est inversible (sa forme particulère rend cette étude évidente), on applique le résultat des questions précédentes sans faire aucun calcul.

Partie II.

On considère la matrice $C=\begin{pmatrix}3&-2&-1\\1&0&-1\\2&-2&0\end{pmatrix}$.

5. **a.** En effectuant des opérations de Gauss à partir de $C-\lambda I$, obtenir une matrice triangulaire supérieure permettant de trouver pour quels réels λ la matrice $C-\lambda I$ n'est pas inversible.
On fait attention à ne pas choisir un pivot dans lequel figure l'inconnu (et qui est donc potentiellement nul)
b. Résoudre $CX=0$ où $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Montrer que l'ensemble F des solutions de cette équation est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et en donner une base et la dimension.
On résout un le système de trois équations à trois inconnues qui découle de l'équation matricielle, on exprime l'ensemble des solutions sous la forme d'un vect. On parle de la liberté de la famille mise en évidence dans le Vect pour conclure qu'il s'agit d'une base de F et en comptant le nombre de vecteurs de cette famille, on en déduit la dimension du sev F.

c. Résoudre $CX = X$ où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Montrer que l'ensemble G des solutions de cette équation est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et en donner une base et la dimension.
idem

d. Résoudre $CX = 2X$ où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Montrer que l'ensemble H des solutions de cette équation est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et en donner une base et la dimension.
idem

e. En posant $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, Déterminer $D = P^{-1}CP$.
Méthode de Gauss-Jordan pour calculer P^{-1} puis calcul de $P^{-1}C$ puis calcul de $P^{-1}CP$

f. Compléter le programme python en utilisant la commande `np.ones` afin d'obtenir la matrice P :

```
P=................
P[1,2]=.........
P[.,.]=0
```

On se souvient de la syntaxe de np.ones et on se souvient que Python commence la numérotation des lignes et des colonnes à 0.

6. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On note $N = P^{-1}M$.

a. Montrer que $M \in E_1(C) \Leftrightarrow N \in E_1(D)$.
On raisonne par équivalences tout du long : Traduire l'appartenance de M à $E_1(C)$ par une égalité vectorielle, puis transformer cette égalité vectorielle en se servant des résultats des questions précédentes, jusqu'à arriver à la traduction par une égalité vectorielle de l'appartenance de N à $E_1(D)$

b. Pour cette question, on admettra que D est la matrice diagonale diag$(0,1,2)$.
Montrer que $N \in E_1(D)$ si et seulement s'il existe trois réels a, b et c tels que l'on ait $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
On comment par prendre une matrice N d'ordre 3 quelconque en donnant des noms à ses 9 coefficients, puis on trouve 9 conditions en exprimant le fait que $DN = N$.

7. En déduire une expression générale des éléments de $E_1(C)$ et déterminer une base et la dimension de $E_1(C)$.
On calcule PN avec la forme de N trouvé dans la question précédente et on exprimer $E_1(C)$ sous la forme d'un Vect pour répondre aux questions.

Solution

Partie I.

1.
- $E_1(A)$ est par construction un sous-ensemble de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
- Comme $A \cdot 0 = 0$, l'ensemble $E_1(A)$ contient 0.
- Soient M et N dans $E_1(A)$ et soient λ et μ dans $\mathbb{R}$. Alors, comme

$$A(\lambda M + \mu N) = \lambda(AM) + \mu(AN) = \lambda M + \mu N,$$

la matrice $\lambda M + \mu N$ appartient elle aussi à $E_1(A)$, qui est donc stable par combinaisons linéaires.

Par suite, $E_1(A)$ est bien un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$.

2. **a.** Soit $M \in E_1(A)$, alors on a $AM = M$, donc $A^2M = A(AM) = A(M) = AM$, donc $M \in E_2(A)$.
Donc $E_1(A) \subset E_2(A)$.

b. D'après la question précédente, il suffit de montrer que, si A est inversible, alors $E_2(A) \subset E_1(A)$.
Or, dans ce cas, soit $M \in E_2(A)$, alors $A^2M = AM$, et donc, en multipliant à gauche par A^{-1}, on en déduit que $A^{-1}A^2M = A^{-1}AM$ et donc $AM = M$, donc $M \in E_1(A)$ ce qui conclut.

3. Si $A - I$ est inversible, alors

$$\begin{aligned} M \in E_1(A) &\Leftrightarrow AM = M \\ &\Leftrightarrow AM - M = 0 \\ &\Leftrightarrow (A-I)M = 0 \\ &\Leftrightarrow (A-I)^{-1}(A-I)M = 0 \\ &\Leftrightarrow M = 0. \end{aligned}$$

On obtient donc dans ce cas, $E_1(A) = \{0\}$.

4. Comme $B - I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B - I$ est inversible (matrice triangulaire supérieure dont les éléments diagonaux sont non nuls), donc $E_1(B) = \{0\}$ d'après **3.a.**. De plus, B est inversible (triangulaire supérieure dont les éléments diagonaux sont non nuls), donc, d'après **2.b.**, $\boxed{E_2(B) = E_1(B) = \{0\}.}$

Partie II.

5. **a.** Soit λ un réel. On écrit $C-\lambda I=\begin{pmatrix}3-\lambda & -2 & -1\\ 1 & -\lambda & -1\\ 2 & -2 & -\lambda\end{pmatrix}$

En échangeant L_1 et L_2, il vient : $\begin{pmatrix}1 & -\lambda & -1\\ 3-\lambda & -2 & -1\\ 2 & -2 & -\lambda\end{pmatrix}$

Puis avec les opérations : $(L_2 \leftarrow L_2-(3-\lambda)L_1,\ L_3 \leftarrow L_3-2L_1)$, $\begin{pmatrix}1 & -\lambda & -1\\ 0 & -\lambda^2+3\lambda-2 & 2-\lambda\\ 0 & 2(\lambda-1) & 2-\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -\lambda & -1\\ 0 & (\lambda-1)(2-\lambda) & 2-\lambda\\ 0 & 2(\lambda-1) & 2-\lambda\end{pmatrix}$

Puis finalement avec l'opération $(L_3 \leftarrow (2-\lambda)L_3-2L_2)$: $\begin{pmatrix}1 & -\lambda & -1\\ 0 & (\lambda-1)(2-\lambda) & 2-\lambda\\ 0 & 0 & \lambda(2-\lambda)\end{pmatrix}$

$\boxed{\text{Les valeurs pour lesquelles } C-\lambda I \text{ n'est pas inversible sont donc 0, 1 et 2}}$, puisque pour ces valeurs, cette matrice est triangulaire supérieure avec un (ou deux) élément(s) diagonal(ux) nul(s). Pour les autres valeurs de λ, la matrice est triangulaire supérieure avec des éléments diagonaux non nuls, et elle est donc inversible.

b. Pour $\lambda=0$,

$$CX=0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{llll} x & -z & & =0\\ & 2z & -2y & =0\end{array}\right. \Leftrightarrow x=y=z.$$

D'où $\boxed{F=\left\{\begin{pmatrix}x\\x\\x\end{pmatrix}, x\in\mathbb{R}\right\}=\text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)}$, espace vectoriel de dimension 1 car engendré par un vecteur non nul, qui est sa base.

c. Pour $\lambda=1$,

$$CX=X \Leftrightarrow (C-I)X=0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{llll} x & -z & -y & =0\\ & z & & =0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=y\\ z=0\end{array}\right.$$

D'où $\boxed{G=\left\{\begin{pmatrix}x\\x\\0\end{pmatrix}, x\in\mathbb{R}\right\}=\text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)}$, espace vectoriel de dimension 1 car engendré par un vecteur non nul, qui est sa base.

d. Pour $\lambda=2$,

$$CX=2X \Leftrightarrow (C-2I)X=0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{llll} x & -z & -2y & =0\\ & 2z & & =0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=z\\ y=0\end{array}\right.$$

D'où $\boxed{H=\left\{\begin{pmatrix}x\\0\\x\end{pmatrix}, x\in\mathbb{R}\right\}=\text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)}$, espace vectoriel de dimension 1 car engendré par un vecteur non nul, qui est sa base.

e. En posant $\boxed{P=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}}$, et en calculant P^{-1} à l'aide de la méthode de Gauss-Jordan et on trouve $\boxed{P^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&0&-1\\1&-1&0\end{pmatrix}}$ et

$$\boxed{P^{-1}CP=D=\text{diag}(0,1,2).}$$

f.
```
P=np.ones((3,3))      # ne pas oublier les doubles parenthèses
P[1,2]=0              # on remplace le coefficient en 2eme ligne et 3me colonne par un 0
P[2,1]=0              # on remplace le coefficient en 3eme ligne et 2me colonne par un 0
```

6. **a.** En appliquant les définitions de la partie I., $N\in E_1(D) \Leftrightarrow DN=N$

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow P^{-1}CPN=N\\ &\Leftrightarrow P^{-1}CPP^{-1}M=P^{-1}M\\ &\Leftrightarrow P^{-1}CM=P^{-1}M\\ &\Leftrightarrow PP^{-1}CM=PP^{-1}M\\ &\Leftrightarrow CM=M\\ &\Leftrightarrow M\in E_1(C).\end{aligned}$$

b. Soit $N=\begin{pmatrix}n_1&n_2&n_3\\n_4&n_5&n_6\\n_7&n_8&n_9\end{pmatrix}$ une matrice quelconque.

$$N\in E_1(D) \quad\Leftrightarrow\quad DN=N \quad\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{l} n_1=n_2=n_3=0\\ n_4=n_4 \quad n_5=n_5 \quad n_6=n_6\\ 2n_7=n_7 \quad 2n_8=n_8 \quad 2n_9=n_9,\end{array}\right.$$

d'où l'existence de trois réels a, b, c tels que $N=\begin{pmatrix}0&0&0\\a&b&c\\0&0&0\end{pmatrix}$.

7. $E_1(C) = \{PN, N \in E_1(D)\} = \left\{P\begin{pmatrix} 0&0&0\\ a&b&c\\ 0&0&0\end{pmatrix}, (a,b,c)\in\mathbb{R}^3\right\} = \left\{\begin{pmatrix} a&b&c\\ a&b&c\\ 0&0&0\end{pmatrix}, (a,b,c)\in\mathbb{R}^3\right\} = \boxed{\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\right)}$

où cette famille est clairement libre (matrices à supports disjoints), c'est donc une base de $E_1(C)$ qui est donc de $\boxed{\text{dimension 3.}}$

Formule du binôme de Newton

Exercice 18

En utilisant la formule du binôme de Newton, calculer les puissances n des matrices suivantes, pour $n \in \mathbb{N}$.

1. $A = \begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix} = N + I$ avec $N = \begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ Or $N^2 = \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ et $N^3 = 0$, donc pour tout $k \geq 3$, $N^k = 0$.
De plus, $I \times N = N = N \times I$ donc on peut appliquer la formule du binôme de Newton et : $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
A^n &= (N+I)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k I^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} N^k I^{n-k} && \text{car pour } k \geq 3, \text{ tous les termes de la sommes sont nuls à cause de } N^k \\
&= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} N^k \\
&= \boxed{I + nN + \frac{n(n-1)}{2} N^2} \\
&= \boxed{\begin{pmatrix}1 & n & \frac{n(n+1)}{2}\\ 0 & 1 & n\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}}
\end{aligned}$$

2. $A = \begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix} = N + 2I$ avec $N = \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ Or $N^2 = \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ et $N^3 = 0$, donc pour tout $k \geq 3$, $N^k = 0$.
De plus, $2I \times N = 2N = N \times 2I$ donc on peut appliquer la formule du binôme de Newton et : $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
A^n &= (N+2I)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k (2I)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} N^k (2I)^{n-k} && \text{car pour } k \geq 3, \text{ tous les termes de la sommes sont nuls à cause de } N^k \\
&= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} 2^{n-k} N^k \\
&= \boxed{2^n I + n2^{n-1} N + 2^{n-2}\frac{n(n-1)}{2} N^2} \\
&= \boxed{\begin{pmatrix}2^n & n2^{n-1} & 2^{n-3}n(n-1)\\ 0 & 2^n & n2^{n-1}\\ 0 & 0 & 2^n\end{pmatrix}}
\end{aligned}$$

3. $A = \begin{pmatrix}6 & -5\\ 5 & -4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5 & -5\\ 5 & -5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = N + I$ N et I commutent et $N^2 = 0$ donc

$$A^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k I^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} N^k = 1 \times N^0 + nN^1 = \boxed{I + n\begin{pmatrix}5 & -5\\ 5 & -5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+5n & -5n\\ 5n & 1-5n\end{pmatrix}}$$

4. $A = \begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix} = N + I$ avec $N = \begin{pmatrix}0&-1&1\\0&0&-2\\0&0&0\end{pmatrix}$ alors $N^2 = \begin{pmatrix}0&0&2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ et $N^k = 0$ pour tout $k \geq 3$

Puisque N et I commutent, d'après le binôme de Newton donne :

$$A^n = (N+I)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k I^{n-k} = \boxed{I_3 + nN + \frac{n(n-1)}{2} N^2 = \begin{pmatrix}1 & -n & n^2\\ 0 & 1 & -2n\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}}$$