Comparaison des fonctions

Exercices d'application directe du cours

Exercice 1 (Détermination d'équivalents)

Déterminer un équivalent aux points considérés de :

1. $e^x - x$ en $+\infty$ et en $-\infty$
2. $(e^h - 1)\big(\ln(1+h)\big)$ en 0
3. $(t^2 - t + 1)(e^t - \ln t)$ en $+\infty$
4. $e^x - 2x^2 + 6$ en 0 et en $+\infty$
5. $\dfrac{3x^2 - 5x + 9}{4x^3 - 5x^2 - 2}$ en 0 et en $+\infty$
6. $\sqrt{x^2+1} - 1$ en 0 et en $+\infty$
7. AArchiclassique : $\left(1 + \frac{a}{x}\right)^x$ en $+\infty$ avec $a \in \mathbb{R}^\star$
8. $\ln\left(\dfrac{x^4+1}{x^4+3}\right)$ en $+\infty$
9. $\sqrt{x}e^{\frac{1}{x}} - \sqrt{x}$ en $+\infty$
10. $\ln(1+2x)(e^{\sqrt{x}} - 1)$ en 0
11. $\dfrac{x + \ln x}{xe^x}$ en 0 et en $+\infty$

Exercice 2 (Un calcul de limite détaillé)

Le but de cet exercice est de détailler la méthode qui permet de calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ avec $f(x) = \left(1 + \dfrac{\ln x}{x}\right)^{\ln x}$

1. Vérifier qu'il s'agit d'une forme indéterminée et préciser laquelle.
2. Transformer l'écriture de expression $f(x)$ au voisinage de $+\infty$ (c'est à dire sans se préoccuper de son ensemble de définition).
3. Préciser la limite de $\frac{\ln x}{x}$ en $+\infty$ en justifiant.
4. Rappeler un équivalent de $\ln(1+\varepsilon)$ en 0.
5. Bien regarder le lien entre les deux questions précédentes et trouver un équivalent de $\ln\left(1 + \frac{\ln x}{x}\right)$ en $+\infty$
6. Conclure en justifiant correctement chaque étape.

Exercice 3 (Détermination d'équivalents)

1. Donner un équivalent et calculer la limite des fonctions suivantes en $+\infty$

   a. $\dfrac{x-1}{x^3+x^2+x+1}$ **c.** $x^2\ln(x) - x^3 + 1$ **e.** $x - e^{x^2}$

   b. $\dfrac{3x^2 + 4 - e^{\frac{x}{2}}}{\ln(x)}$ **d.** $\dfrac{\ln(2x+1)}{x+1}$ **f.** $\dfrac{x + \sqrt{x^2+x+3}}{x + \ln(x)}$

2. Donner un équivalent et calculer la limite des fonctions suivantes en $-\infty$:

   a. $x^{23} - x^{17}$ **c.** $x + \sqrt{x^2+x+1}$ **e.** $(1+x^2)e^x$

   b. $\dfrac{x-1}{x^3+x^2+x+1}$ **d.** $\dfrac{\ln(1+x^2)}{x}$ **f.** $\sqrt{\dfrac{x^2}{2x^2+x+1}}$

3. Donner un équivalent et calculer les limites des fonctions suivantes en 0 (en 0^+ et 0^- si nécessaire)

   a. $x + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$ **c.** $\dfrac{\ln(1+x^2)}{x}$ **e.** $\dfrac{1-e^{-x}}{x}$

   b. $x + \ln(x) + \dfrac{1}{x}$ **d.** $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ **f.** $\dfrac{4x-2}{x^2-4x}$

Exercices d'approfondissement

Exercice 4 (un calcul de limite non détaillé)

Déterminer un équivalent puis la limite en 0 de $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+x^3} - \sqrt{x}}{\sqrt{x} + x^2}$

Exercice 5 (une fonction définie par une intégrale)

On note pour tout $x > 0$,

$$f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-t}}{\sqrt{t+x}}\,\mathrm{d}t.$$

1. Justifier que f est bien définie pour tout $x > 0$.
2. **a.** Montrer que pour tout réel $x > 0$,
   $$0 \leq \int_0^1 \frac{e^{-t}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}t - f(x) \leq \frac{1}{2x\sqrt{x}}.$$
   b. En déduire que, pour tout réel $x > 0$,
   $$0 \leq \frac{1-e^{-1}}{\sqrt{x}} - f(x) \leq \frac{1}{2x\sqrt{x}}.$$
   c. En déduire un équivalent en $+\infty$ de $f(x)$.