Comparaison des fonctions - éléments de correction

Exercices d'application directe du cours

Exercice 1 (Détermination d'équivalents)

1. $e^x - x$ en $+\infty$ et en $-\infty$:

   • $x \underset{+\infty}{=} o(e^x)$ donc $\boxed{e^x - x \underset{+\infty}{\sim} e^x}$ • $e^x \underset{-\infty}{\longrightarrow} 0$ et $x \underset{-\infty}{\longrightarrow} -\infty$ donc $\boxed{e^x - x \underset{-\infty}{\sim} -x}$

2. $(e^h - 1)\big(\ln(1+h)\big)$ en 0

   D'après les équivalents de référence, $e^h - 1 \underset{0}{\sim} h$ et $\ln(1+h) \underset{0}{\sim} h$ donc par produit, $\boxed{(e^h-1)\big(\ln(1+h)\big) \underset{0}{\sim} h^2}$

3. $(t^2 - t + 1)(e^t - \ln t)$ en $+\infty$

   $t^2 - t + 1 \underset{+\infty}{\sim} t^2$ et $e^t - \ln t \underset{+\infty}{\sim} e^t$ car $\ln(t) \underset{+\infty}{=} o(e^t)$ par croissances comparées, donc par produit, $\boxed{(t^2-t+1)(e^t - \ln t) \underset{+\infty}{\sim} t^2 e^t}$

4. $e^x - 2x^2 + 6$ en 0 et en $+\infty$

   • $2x^2 + 6 \underset{+\infty}{=} o(e^x)$ donc $\boxed{e^x - 2x^2 + 6 \underset{+\infty}{\sim} e^x}$ • $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 2x^2 + 6}{7} = 1$ donc $\boxed{e^x - 2x^2 + 6 \underset{0}{\sim} 7}$

5. $\dfrac{3x^2 - 5x + 9}{4x^3 - 5x^2 - 2}$ en 0 et en $+\infty$

   • une fraction rationnelle étant équivalente au quotient de ses monômes de plus haut degré en $+\infty$: $\boxed{\dfrac{3x^2-5x+9}{4x^3-5x^2-2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{3}{4x}}$

   • une fraction rationnelle étant équivalente au quotient de ses monômes de plus bas degré en 0 : $\boxed{\dfrac{3x^2-5x+9}{4x^3-5x^2-2} \underset{0}{\sim} -\dfrac{9}{2}}$

6. $\sqrt{x^2+1} - 1$ en 0 et en $+\infty$

   • On sait que $(1+t)^{\frac{1}{2}} - 1 \underset{0}{\sim} \frac{1}{2} t$ or $x^2 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ donc en posant $t = x^2$, on obtient : $\boxed{\sqrt{1+x^2} - 1 \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{2}x^2}$

   • Au voisinage de $+\infty$, x étant positif, $\sqrt{x^2+1} = \sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2}} = |x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$.

   Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = 1$, on en déduit que $\sqrt{x^2+1} \underset{+\infty}{\sim} x$ et donc $\boxed{\sqrt{x^2+1} - 1 \underset{+\infty}{\sim} x}$

7. AAarchiclassique : $\left(1+\frac{a}{x}\right)^x$ en $+\infty$ avec $a \in \mathbb{R}^\star$

   Méthode à retenir et à savoir refaire sur des exercices du même style (avec une valeur numérique pour a par exemple) :

   a. On transforme l'écriture grâce à la règle de calcul $a^b = e^{b\ln a}$.

   b. On utilise les équivalents de référence pour la partie avec du logarithme.

   c. On utilise la compatibilité des équivalents avec le produit et on obtient un équivalent **constant non nul**

   d. On transforme l'équivalent en une limite.

   e. On en déduit la limite de l'exponentielle en invoquant la continuité du logarithme.

   f. On transforme la limite (non nulle) en un équivalent.

   $\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^{x\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)}$ Or $\ln\left(1+\frac{a}{x}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{a}{x}$ d'après les équivalents de référence en 0, comme $\frac{a}{x} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$

   les équivalents étant compatibles avec le produit, on en déduit $x\ln\left(1+\frac{a}{x}\right) \underset{+\infty}{\sim} a$

   Comme $a \neq 0$, on en déduit que $x\ln\left(1+\frac{a}{x}\right) \underset{+\infty}{\longrightarrow} a$

   Mais puisque la fonction exponentielle est continue[1] en a, $e^{x\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)} \underset{+\infty}{\longrightarrow} e^a$

   Et puisque $e^a \neq 0$, on en déduit $e^{x\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)} \underset{+\infty}{\sim} e^a$, càd $\boxed{\left(1+\frac{a}{x}\right)^x \underset{+\infty}{\sim} e^a}$

8. $\ln\left(\dfrac{x^4+1}{x^4+3}\right)$ en $+\infty$

   $\dfrac{x^4+1}{x^4+3} = \dfrac{x^4+3-2}{x^4+3} = 1 - \dfrac{2}{x^4+3}$ or $\frac{2}{x^4+3} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$

   Donc $\ln\left(1 - \frac{2}{x^4+3}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{2}{x^4+3}$ mais $\frac{2}{x^4+3} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{x^4}$ Donc au final $\boxed{\ln\left(\dfrac{x^4+1}{x^4+3}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{2}{x^4}}$

1. argument essentiel, si vous ne comprenez pas d'où il vient, posez moi la question !

9. $\sqrt{x}e^{\frac{1}{x}} - \sqrt{x}$ en $+\infty$

$\sqrt{x}e^{\frac{1}{x}} - \sqrt{x} = \sqrt{x}(e^{\frac{1}{x}} - 1)$ or $\frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $e^{\frac{1}{x}} - 1 \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$

En multipliant par $\sqrt{x}$, on a $\sqrt{x}(e^{\frac{1}{x}} - 1) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{x}}{x}$ donc au final, $\boxed{\sqrt{x}e^{\frac{1}{x}} - \sqrt{x} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}}}$

10. $\ln(1+2x)(e^{\sqrt{x}} - 1)$ en 0

pas de difficulté (justifications laissées au lecteur), on trouve : $\boxed{\ln(1+2x)(e^{\sqrt{x}} - 1) \underset{0}{\sim} 2x\sqrt{x}}$

11. $\dfrac{x+\ln x}{xe^x}$ en 0 et en $+\infty$

- $\boxed{\dfrac{x+\ln x}{xe^x} \underset{0}{\sim} \dfrac{\ln x}{x}}$
- $\boxed{\dfrac{x+\ln x}{xe^x} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{e^x}}$

(justifications laissées au lecteur)

Exercice 2 (Un calcul de limite détaillé)

Le but de cet exercice est de détailler la méthode qui permet de calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ avec $f(x) = \left(1 + \dfrac{\ln x}{x}\right)^{\ln x}$

1. FI du type 1^∞
2. $f(x) = \left(1 + \dfrac{\ln x}{x}\right)^{\ln x} = e^{\ln x \times \ln\left(1+\frac{\ln x}{x}\right)}$
3. $\frac{\ln x}{x} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées.
4. Or $\ln(1+\varepsilon) \underset{0}{\sim} \varepsilon$
5. On peut donc conclure, en posant $\varepsilon = \frac{\ln x}{x}$ que $\ln\left(1 + \frac{\ln x}{x}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln x}{x}$
6. En multipliant par $\ln x$, il vient $\ln x \times \ln\left(1 + \frac{\ln x}{x}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln^2 x}{x}$

   Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln^2 x}{x} = 0$ donc $\ln x \times \ln\left(1 + \frac{\ln x}{x}\right)$ admet aussi une limite nulle en $+\infty$ et par composition avec l'exponentielle qui est continue[2] en 0, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = e^0 = 1$

Exercice 3 (Détermination d'équivalents)

1. Donner un équivalent et calculer la limite des fonctions suivantes en $+\infty$

   a. $\frac{1}{x^2}$ et 0

   b. $\frac{-e^{\frac{x}{2}}}{\ln x}$ et $-\infty$

   c. $-x^3$ et $-\infty$

   d. $\frac{\ln x}{x}$ et 0

   e. $-e^{x^2}$ et $-\infty$

   f. 2 et 2

2. Donner un équivalent et calculer la limite des fonctions suivantes en $-\infty$:

   a. x^{23} et $-\infty$

   b. $\frac{1}{x^2}$ et 0

   c. $-\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$

   d. $\frac{2\ln(-x)}{x}$ et 0

   e. x^2e^x et 0

   f. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\frac{1}{\sqrt{2}}$

3. Donner un équivalent et calculer les limites des fonctions suivantes en 0 (en 0^+ et 0^- si nécessaire)

   a. $-\frac{1}{x^2}$ et $-\infty$

   b. $\frac{1}{x}$ et $+\infty$

   c. x et 0

   d. e et e

   e. 1 et 1

   f. $\frac{1}{2x}$ et $+\infty$ en 0^+ et $-\infty$ en 0^-

Exercices d'approfondissement

Exercice 4 (un calcul de limite non détaillé)

Déterminer un équivalent puis la limite en 0 de $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+x^3} - \sqrt{x}}{\sqrt{x+x^2}}$

Indications : factoriser par $\sqrt{x}$ en haut, puis utiliser des équivalents de référence, et considérer le terme prépondérant en bas.

Exercice 5 (une fonction définie par une intégrale)

Exercice difficile, venir demander des indications si vous voulez le traiter.

2. toujours le même argument!