Comparaison des suites

Exercices d'application directe du cours

Exercice 1

Vrai ou Faux ?

1. $n \underset{n\to+\infty}{\sim} n+1$.
2. $n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2+n$.
3. $\ln(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(100000n)$.
4. $e^n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{n+\frac{1}{100000000}}$.
5. $e^n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{2n}$.
6. $\ln(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n+1)$.

Exercice 2 (Recherche d'équivalents et de limites)

Déterminer un équivalent et la limite de chacune des suites suivantes.

1. $u_n = -2n^2+7n+3$.
2. $u_n = n - \frac{3}{n^5}$.
3. $u_n = \frac{3n^2+2n-5}{-4n^2+3n-8}$.
4. $u_n = (1.1)^n - n^{92} + e^{-n}$.
5. $u_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n - \sqrt{n}$.
6. $u_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n \times \sqrt{n}$.
7. $u_n = \frac{3n^2+2^n-5^n}{\ln(n)-4n^2+3^n-8}$.
8. $u_n = \sqrt{2n+1}+\sqrt{2n}$.
9. $u_n = \sqrt{2n+1}-\sqrt{2n}$.
10. $u_n = n\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)$.

Exercice 3 (Equivalent à partir d'un encadrement)

1. Soit (u_n) une suite vérifiant, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $$n^2 \leqslant u_n \leqslant n^2+n+1$$
   Déterminer la limite et un équivalent de u_n.
2. Soit (v_n) une suite vérifiant, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $$\frac{1}{n+1} \leqslant v_n \leqslant \frac{1}{n}$$
   Déterminer la limite de $(nv_n)_n$, en déduire un équivalent de v_n et sa limite.

Exercice 4 (Suite implicite)

On note (E_n) l'équation $$(E_n) : \frac{x^3}{x^2+1} = n$$

1. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, l'équation (E_n) possède une unique solution notée x_n, sur $\mathbb{R}$.
   Donner la valeur de u_0.
2. Quelle est la monotonie de la suite (x_n) ?
3. Montrer que pour tout $n\geqslant 1$, $$n \leqslant x_n \leqslant n+1$$
4. En déduire la limite de la suite x_n et donner un équivalent.

Exercice 5 (Recherche de limites)

Déterminer, si elle existe, la limite de chacune des suites suivantes (on pourra parfois - pas toujours - penser aux équivalents) :

1. $u_n = \frac{n^3-\ln(n)}{e^{2n}+1}$
2. $u_n = \sqrt{n^2+1}-n$
3. $u_n = \frac{e^n-3^n}{e^n+n!}$
4. $u_n = \left(1+\frac{a}{n}\right)^{bn}$ avec $(a,b)\in]0;+\infty[^2$
5. $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$
   (indic° : utiliser une relation du type $\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x+1}+\frac{b}{x+2}$)
6. $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$ (indic° : une somme de n termes est plus grande que n fois le plus petit terme et plus petite que n fois le plus grand)

Exercice 6 (Recherche d'équivalents)

Donner un équivalent pour chacune des suites :

1. $u_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}$
2. $u_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}$
3. $u_n = \ln\left(2-e^{-\frac{1}{n^2}}\right)$
4. $u_n = \ln(n+1)-\ln n$

Exercice 7 (extrait d'ESSEC 1990)

Soit (u_n) une suite à valeurs positives vérifiant : $\forall n\in\mathbb{N}^*$ $\frac{2(2n+1)}{\pi} \leq u_n^2 \leq \frac{(2n+1)^2}{n\pi}$
Déterminer un équivalent de u_n.

Exercice d'approfondissement

Exercice 8

Montrer que $\sum_{k=1}^{n} k! \underset{+\infty}{\sim} n!$

Exercices tirés d'annales

Dans les exercices d'annales, il n'y a souvent qu'une ou deux questions qui font appel aux équivalents. Elles peuvent être situées indifféremment en début ou en fin d'exercice. Le plus gros du travail se situe souvent dans la justification du travail préparatoire qui permettra ensuite de conclure à un équivalent.

Exercice 9 (HEC 2000)

1. On note $(h_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $h_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ pour $n \geq 1$

- **a.** Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}$
- **b.** En déduire les inégalités $\ln(n+1) \leq h_n \leq 1 + \ln(n)$.
- **c.** Déterminer un équivalent simple de h_n.

2. On note $(h_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $k_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ pour $n \geq 1$

- **a.** Montrer que $\forall k \geq 2, \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$
- **b.** En déduire la majoration $k_n \leq 2$.
- **c.** Déterminer un équivalent simple de $h_n - k_n$.

Exercice 10 (Ecricome 2001 ex 3)

Sujet original à chercher sur le net

Thèmatiques : Résolution d'une équation, dénombrement des racines d'une équation, équivalent d'une suite implicite.

La partie 1. permet de travailler la représentation graphique d'une fonction, du calcul fractionnaire et une recherche de racines d'un polynôme de degré 3.

La partie 2. permet de travailler le théorème de la bijection et des calculs de limites simples dans des cas un peu plus abstraits que d'habitude.

La dernière partie permet de travailler sur des inégalités, des sommes, les règles de calcul du logarithme et les règles calculatoires sur les équivalents