Comparaison des suites - éléments de correction

Exercices d'application directe du cours

Exercice 1

Vrai ou Faux ?

1. $n \underset{n\to+\infty}{\sim} n+1$: VRAI
2. $n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2+n$: VRAI
3. $\ln(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(100000n)$: VRAI
4. $e^n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{n+\frac{1}{100000000}}$: FAUX
5. $e^n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{2n}$: FAUX
6. $\ln(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n+1)$: VRAI

Exercice 2 (Recherche d'équivalents et de limites)

Déterminer un équivalent et la limite de chacune des suites suivantes.

	Formule explicite	équivalent	limite
1.	$-2n^2+7n+3$	$-2n^2$	$-\infty$
2.	$n-\frac{3}{n^5}$	n	$+\infty$
3.	$\frac{3n^2+2n-5}{-4n^2+3n-8}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{4}$
4.	$(1.1)^n - n^{92}+e^{-n}$	$(1.1)^n$	$+\infty$
5.	$\left(\frac{3}{4}\right)^n - \sqrt{n}$	$-\sqrt{n}$	$-\infty$

	Formule explicite	équivalent	limite
6.	$\left(\frac{3}{4}\right)^n \times \sqrt{n}$	$\left(\frac{3}{4}\right)^n \times \sqrt{n}$	0
7.	$\frac{3n^2+2^n-5^n}{\ln(n)-4n^2+3^n-8}$	$-\left(\frac{5}{3}\right)^n$	$-\infty$
8.	$\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n}$	$2\sqrt{2n}$	$+\infty$
9.	$\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n}$	$\frac{1}{2\sqrt{2n}}$	0
10.	$n\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)$	2	2

Exercice 3 (Equivalent à partir d'un encadrement)

1. Soit (u_n) une suite vérifiant, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $$n^2 \leqslant u_n \leqslant n^2+n+1$$
   Déterminer la limite et un équivalent de u_n.

   $u_n \geq n^2$ donc d'après le théorème de minoration, $u_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} +\infty$
   En divisant les membres de l'encadrement par n^2 positif, $1 \leqslant \frac{u_n}{n^2} \leqslant 1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}$
   Donc d'après le théorème des gendarmes, $\frac{u_n}{n^2}$ étant encadrée par deux suites convergent vers 1, elle converge vers 1.
   On en déduit que $u_n \underset{+\infty}{\sim} n^2$ (et on trouve un résultat cohérent avec la limite trouvée précédemment)

2. Soit (v_n) une suite vérifiant, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $$\frac{1}{n+1} \leqslant v_n \leqslant \frac{1}{n}$$
   Déterminer la limite de $(nv_n)_n$, en déduire un équivalent de v_n et sa limite.

   En multipliant l'encadrement par n et en simplifiant par n dans le membre de gauche, il vient : $\frac{1}{1+\frac{1}{n}} \leqslant nv_n \leqslant 1$
   D'après le théorème des gendarmes, $nv_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, c'est à dire $\frac{v_n}{\frac{1}{n}} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 1$ donc on en déduit que $v_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ et par suite $v_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$
   (ce qu'on aurait pu obtenir d'emblée avec le théorème des gendarmes grâce à l'énoncé d'origine)

Exercice 4 (Suite implicite)

On note (E_n) l'équation $$(E_n) : \frac{x^3}{x^2+1} = n$$

1. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, l'équation (E_n) possède une unique solution notée x_n, sur $\mathbb{R}$. Donner la valeur de u_0.

   Une étude rapide et facile de $\varphi : \mathbb{R}\to\mathbb{R};\ x \mapsto \frac{x^3}{x^2+1}$ (étude du signe de la dérivée, du sens de variation, constat du caractère continu et calcul des limites en $-\infty$ et $+\infty$) permet facilement de montrer que φ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
   Or $\forall n\in\mathbb{N}$, $n\in\mathbb{R}$ donc l'équation $\varphi(x)=n$ admet une unique solution notée x_n dans $\mathbb{R}$.
   On remarque que $\varphi(0)=0$. Puisque l'équation $\varphi(x)=0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$, cela ne peut être que 0 et on a donc prouvé que $u_0=0$.

2. Quelle est la monotonie de la suite (x_n) ?

   φ réalisant une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, sa réciproque φ^{-1} réalise également une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
   Or par définition, $\varphi(x_n)=n$ et on a donc $\varphi^{-1}(n)=x_n$.
   Or $n\leq n+1$, donc par croissance de φ^{-1}, on en déduit que $\varphi^{-1}(n)\leq\varphi^{-1}(n+1)$ c'est à dire $x_n\leq x_{n+1}$ d'où (x_n) croissante.

3. Montrer que pour tout $n\geqslant 1$, $$n \leqslant x_n \leqslant n+1$$

$\varphi(x_n)=n \quad\Leftrightarrow\quad \frac{x_n^3}{x_n^2+1}=n \quad\Leftrightarrow\quad \frac{x_n}{1+\frac{1}{x_n}}=n \quad\Leftrightarrow\quad x_n=n\left(1+\frac{1}{x_n}\right) \quad\Leftrightarrow\quad x_n=n+\frac{n}{x_n}$

Puisque $x_0=0$ et (x_n) croissante, on en déduit que $\frac{n}{x_n}>0$ pour $n\geq 1$ et donc que $x_n\geq n$ (inégalité de gauche demandée)

De cela on déduit que $\frac{n}{x_n}\leq 1$ et donc que $n+\frac{n}{x_n}\leq 1$ c'est à dire que $x_n\leq n+1$ (inégalité de droite demandée)

4. En déduire la limite de la suite x_n et donner un équivalent.

En divisant l'encadrement obtenu dans la question précédente par n, il vient $1\leq \frac{x_n}{n}\leq 1+\frac{1}{n}$

Puis, par le théorème des gendarmes, $\frac{x_n}{n}\underset{+\infty}{\longrightarrow}1$ c'est-à-dire $x_n \underset{+\infty}{\sim} n$ d'où $x_n\underset{+\infty}{\longrightarrow}+\infty$

Exercice 5 (Recherche de limites)

Déterminer, si elle existe, la limite de chacune des suites suivantes (on pourra parfois - pas toujours - penser aux équivalents) :

Réponses brutes, sans rédaction développée :

1. $u_n=\frac{n^3-\ln(n)}{e^{2n}+1}$ $\quad u_n\sim\frac{n^3}{e^{2n}}$ $\quad u_n\underset{+\infty}{\longrightarrow}0$
2. $u_n=\sqrt{n^2+1}-n$ $\quad$ technique de la quantité conjuguée : $\quad u_n=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}\underset{+\infty}{\longrightarrow}0$
3. $u_n=\frac{e^n-3^n}{e^n+n!}$ $\quad u_n\sim-\frac{3^n}{n!}$ $\quad u_n\underset{+\infty}{\longrightarrow}0$
4. $u_n=\left(1+\frac{a}{n}\right)^{bn}$ avec $(a,b)\in]0;+\infty[^2$ $\quad u_n\underset{+\infty}{\longrightarrow}e^{ab}$
   (même rédaction classique et incontournable que dans l'item 7 de l'ex 1 du TD sur les comparaisons de fonctions)
5. $u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)}$
   $\frac{1}{(k+2)(k+1)}=\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}$ $\quad$ puis somme télescopique puis $\quad u_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}$ $\quad u_n\underset{+\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{2}$
6. $u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$ (indic° : une somme de n termes est plus grande que n fois le plus petit terme et plus petite que n fois le plus grand)
   $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\leq\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}\leq\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ donc en additionnant membre à membre : $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\leq u_n\leq\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$
   On montre facilement que les suites majorantes et minorantes convergent vers 1 donc d'après le théorème des gendarmes, $u_n\underset{+\infty}{\longrightarrow}1$

Exercice 6 (Recherche d'équivalents)

Donner un équivalent pour chacune des suites :

1. $u_n=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}$ $\quad u_n\sim\frac{2}{n^2}$
2. $u_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}$ $\quad u_n\sim\frac{1}{\sqrt{n}}$
3. $u_n=\ln\left(2-e^{-\frac{1}{n^2}}\right)$ $\quad u_n\sim\frac{1}{n^2}$
4. $u_n=\ln(n+1)-\ln n$ $\quad u_n\sim\frac{1}{n}$

Exercice 7 (extrait d'ESSEC 1990)

Soit (u_n) une suite à valeurs positives vérifiant : $\forall n\in\mathbb{N}^*$ $\quad \frac{2(2n+1)}{\pi}\leq u_n^2\leq\frac{(2n+1)^2}{n\pi}$

Déterminer un équivalent de u_n.

Par manipulation sur les encadrements, il vient facilement que $\frac{2(2n+1)}{4n}\leq\frac{\pi u_n^2}{4n}\leq\frac{(2n+1)^2}{4n^2}$

la suite majorante et la suite minorante sont équivalentes à 1 et convergent donc vers 1.

Donc d'après le théorème des gendarmes, il vient que $\frac{\pi u_n^2}{4n}\underset{+\infty}{\longrightarrow}1$ d'ou $u_n^2\sim\frac{4n}{\pi}$ et par suite, par compatibilité des équivalents avec le passage à la puissance 1/2, $u_n\sim 2\sqrt{\frac{n}{\pi}}$

Exercice d'approfondissement

Exercice 8

Montrer que $\sum_{k=1}^{n}k!\underset{+\infty}{\sim}n!$ $\quad$ Pour la correction, on pourra visionner cette vidéo

Exercices tirés d'annales

Exercice 9 (HEC 2000)

1. **a.** Soit $k\in\mathbb{N}^*$.

Pour tout $t\in[k,k+1]$, $\frac{1}{k+1}\leq\frac{1}{t}\leq\frac{1}{k}$.

Par positivité de l'intégrale $(k+1\geq k)$, on a :

$$\int_k^{k+1}\frac{1}{k+1}dt\leq\int_k^{k+1}\frac{1}{t}dt\leq\int_k^{k+1}\frac{1}{k}\,\mathrm{d}t,\quad \text{ie}\quad \frac{1}{k+1}\leq\ln(k+1)-\ln k\leq\frac{1}{k}.$$

b. En sommant l'inégalité $\ln(k+1)-\ln k \leq \frac{1}{k}$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n}(\ln(k+1)-\ln(k)) \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}, \quad \text{ie} \quad \ln(n+1) \leq h_n.$$

De même, en sommant l'inégalité $\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1)-\ln(k)$ pour tout $k \in [\![1,n-1]\!]$, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n-1}(\ln(k+1)-\ln(k)), \quad \text{donc} \quad \sum_{j=2}^{n}\frac{1}{j} \leq \ln n - \ln 1,$$

$$\text{donc, en ajoutant 1,} \quad 1+\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{j} \leq 1+\ln n, \quad \text{ie} \quad h_n \leq 1+\ln n.$$

On a donc bien, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ \ln(n+1) \leq h_n \leq 1+\ln n.}$

c. D'après l'inégalité précédente, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{\ln(n+1)}{\ln n} \leq \frac{h_n}{\ln n} \leq \frac{1+\ln n}{\ln n}$.
Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln(n+1)}{\ln n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln n+\ln(1+1/n)}{\ln n} = \lim\limits_{n\to+\infty} 1+\frac{\ln(1+1/n)}{\ln n} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1+\ln n}{\ln n} = \lim\limits_{n\to+\infty} 1+\frac{1}{\ln n} = 1$, donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{h_n}{\ln n} = 1$, ie $\boxed{h_n \underset{+\infty}{\sim} \ln n.}$

2. a. Pour tout $k \geq 2$, $\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k} = \frac{k-(k-1)}{k(k-1)} = \frac{1}{k(k-1)} \geq \frac{1}{k^2}$ car $k(k-1) \leq k^2$.

b. On a donc

$$\begin{aligned} k_n &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \\ &\leq 1+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right) = 1+1-\frac{1}{n} \leq 2. \end{aligned}$$

c. Comme $0 \leq k_n \leq 2$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{k_n}{h_n} = 0$, donc $k_n = o(h_n)$ et, par suite, $\boxed{h_n - k_n \underset{+\infty}{\sim} h_n \underset{+\infty}{\sim} \ln n.}$

Exercice 10 (Ecricome 2001 ex 3)

A. Étude d'un cas particulier.

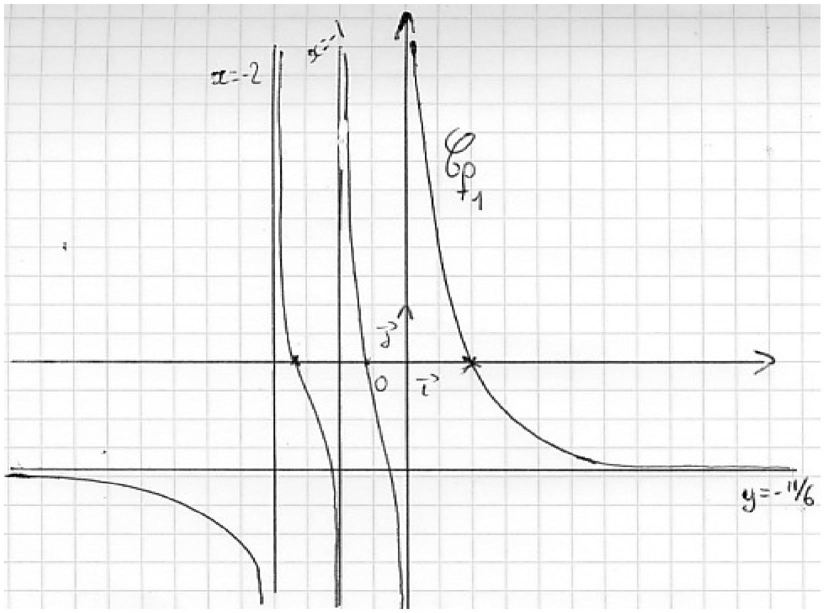
1. $f_1 : x \mapsto \frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}-\frac{11}{6}$ est définie, continue et dérivable sur $D_{f_1} = \mathbb{R}\setminus\{0,-1,-2\}$.
Pour tout $x \in D_{f_1}$, $f_1'(x) = -\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{(x+2)^2} < 0$. On a donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$f_1'(x)$		-	‖	-	‖	-	‖	-	
$f_1(x)$	$-a$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-a$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x) = -a$,
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = -a$,
- $\forall i \in \{-2,-1,0\}$,

$$\lim_{x\to i^-} f_1(x) = \lim_{x\to i^-} \underbrace{\frac{1}{x-i}}_{\text{terme prépondérant}} = -\infty \text{ et } \lim_{x\to i^+} f_1(x) = \lim_{x\to i^+}\frac{1}{x-i} = +\infty.$$

Voici la représentation graphique de f_1 :



2. $f_1(1)=0$, donc 1 est solution de (E_1).
De plus, pour tout $x \notin \{0,-1,-2\}$ (qui ne sont pas solution de (E_1)), on a

$$\begin{aligned}
x \text{ solution de } E_1 &\Leftrightarrow \tfrac{1}{x}+\tfrac{1}{x+1}+\tfrac{1}{x+2}=\tfrac{11}{6}\\
&\Leftrightarrow \tfrac{(x+1)(x+2)+x(x+2)+x(x+1)}{x(x+1)(x+2)}=\tfrac{11}{6}\\
&\Leftrightarrow 6[x^2+3x+2+x^2+2x+x^2+x]=11x(x^2+3x+2)\\
&\Leftrightarrow 18x^2+36x+12=11x^3+33x^2+22x\\
&\Leftrightarrow 11x^3+15x^2-14x-12=0\\
&\Leftrightarrow (x-1)(11x^2+26x+12)=0
\end{aligned}$$

(*On pense à factoriser par $x-1$ car on sait que 1 est solution de E_1*)
$\Delta=26^2-4\times 11\times 12=148=4\times 37>0$. L'équation $11x^2+26x+12=0$ a donc deux solutions :
$x_1=\frac{-26-2\sqrt{37}}{22}=-\frac{13+\sqrt{37}}{11}\approx -19/11$ et $x_2=\frac{-13+\sqrt{37}}{11}\approx -7/11$.
Les solutions de l'équation (E_1) sont $\boxed{-\frac{13+\sqrt{37}}{11},\ \frac{-13+\sqrt{37}}{11} \text{ et } 1.}$

B. Dénombrement des racines de (E_n).

1. f_n est C^1 sur $D_{f_n}=\mathbb{R}\setminus\{0,\ -1,\ -2,\dots,\ -2n\}$ par opérations sur les fonctions usuelles.
Pour tout $x\in D_{f_n}$, $f_n'(x)=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{(x+2)^2}-\dots-\frac{1}{(x+2n)^2}<0$.
On a donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$-2n$	…	$-(i+1)$		$-i$	…	-1		0		$+\infty$
$f_n'(x)$		-	‖	…	‖	-	‖	…	‖	-	‖	-	
$f_n(x)$	$-a$	↘	$-\infty$‖	…	‖ $+\infty$	↘	$-\infty$‖	…	‖ $+\infty$	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	$-a$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x)=-a$, • $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)=-a$,
- $\forall i\in\{-2n,-(2n-1),\dots,-2,-1,0\}$,

$$\lim_{x\to i^-} f_n(x)=\lim_{x\to i^-}\underbrace{\frac{1}{x-i}}_{\text{terme prépondérant}}=-\infty \text{ et } \lim_{x\to i^+} f_n(x)=\lim_{x\to i^+}\frac{1}{x-i}=+\infty.$$

2. • $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x)=-a$ et $\lim\limits_{x\to-2n^-} f_n(x)=-\infty$.
f_n est continue et strictement décroissante sur $]-\infty,-2n[$, elle réalise donc une bijection de $]-\infty,-2n[$ sur $]-\infty,-a[$.
Or, $0\notin\ ]-\infty,-a[$, donc l'équation $E_n \Leftrightarrow f_n(x)=0$ n'a pas de solution sur $]-\infty,-2n[$.
• $\lim\limits_{x\to i^+} f_n(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to(i+1)^-} f_n(x)=-\infty$
Pour tout $i\in[\![-2n,-1]\!]$, f_n est continue et strictement décroissante sur $]i,i+1[$, elle réalise donc une bijection de $]i,i+1[$ sur $]-\infty,+\infty[=\mathbb{R}$.

Or, $0 \in \mathbb{R}$, donc l'équation $E_n \Leftrightarrow f_n(x) = 0$ a une unique solution sur $]i, i+1[$.

- $\lim_{x \to 0^+} f_n(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$

f_n est continue et strictement décroissante sur $]0, +\infty[$, elle réalise donc une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]-a, +\infty[$.
Or, $0 \in]-a, +\infty[$, donc l'équation $E_n \Leftrightarrow f_n(x) = 0$ a une unique solution sur $]0, +\infty[$.

- Au total, il y a donc $0 + 2n + 1 = 2n + 1$ solutions à l'équation (E_n), la plus grande étant la seule solution positive.

C. Équivalent de la plus grande des racines quand n tend vers $+\infty$.

1. cf. la fin du B2)

2. **a.** • Pour tout $x > 1$, $\frac{x}{x-1} > 1$, donc $\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) < \frac{x}{x-1} - 1 = \frac{1}{x-1}$,
car pour tout $X \in \mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\}$, $\ln(X) < X - 1$.
• De même, comme $1 > (x-1)/x > 0$, on a $\ln\left(\frac{x-1}{x}\right) < \frac{x-1}{x} - 1 = -1/x$,
d'où $\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) = -\ln\left(\frac{x-1}{x}\right) > 1/x$.
• On a donc bien :

$$\boxed{\forall x > 1, \qquad \frac{1}{x} < \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) < \frac{1}{x-1}.}$$

b. Pour tout $x > 0$, pour tout $i \in [\![1, 2n]\!]$, $x + i > 1$, donc, d'après a), $\frac{1}{x+i} < \ln\left(\frac{x+i}{x+i-1}\right)$.
Par suite,

$$\begin{aligned} f_n(x) - \frac{1}{x} + a &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{x+k} < \sum_{k=1}^{2n} \ln\left(\frac{x+k}{x+k-1}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{2n} (\ln(x+k) - \ln(x+k-1)) = \sum_{k=1}^{2n} \ln(x+k) - \sum_{k=0}^{2n-1} \ln(x+k) \\ &= \ln(x+2n) - \ln(x) = \ln\left(\frac{x+2n}{x}\right) = \ln\left(1 + \frac{2n}{x}\right). \end{aligned}$$

De même, $\forall x > 0$, $\forall i \in [\![1, 2n]\!]$, $x + i > 1$, donc, d'après a), $\ln\left(\frac{x+i}{x+i-1}\right) < \frac{1}{x+i-1}$.
Par suite,

$$f_n(x) - \frac{1}{x+2n} + a = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{x+k-1} > \sum_{k=1}^{2n} \ln\left(\frac{x+k}{x+k-1}\right) = \ln\left(1 + \frac{2n}{x}\right) \quad \text{(cf. calcul précédent).}$$

On a bien les deux côtés de l'inégalité à démontrer...

c. Comme x_n est solution strictement positive de l'équation $f_n(x) = 0$, on a $f_n(x_n) = 0$, et, en prenant $x = x_n$ dans l'encadrement précédent, on obtient :

$$\boxed{a - \frac{1}{x_n} < \ln\left(1 + \frac{2n}{x_n}\right) < a - \frac{1}{x_n + 2n}.}$$

3. Comme $x_n > 0$, on a $a - \frac{1}{x_n+2n} < a$, d'où, d'après la question précédente, on a $\ln\left(1 + \frac{2n}{x_n}\right) < a$. Or

$$\begin{aligned} \ln\left(1 + \frac{2n}{x_n}\right) < a &\Leftrightarrow 1 + \frac{2n}{x_n} < e^a \Leftrightarrow \frac{2n}{x_n} < e^a - 1 \qquad (>0) \\ &\Leftrightarrow \frac{x_n}{2n} > \frac{1}{e^a - 1} \Leftrightarrow \boxed{x_n > \frac{2n}{e^a - 1}.} \end{aligned}$$

4. Comme $\lim \frac{2n}{e^a-1} = +\infty$ (car $e^a - 1 > 0$), on a $\lim x_n = +\infty$.
Comme $\lim\left(a - \frac{1}{x_n}\right) = a$ et $\lim\left(a - \frac{1}{x_n+2n}\right) = a$, d'après le théorème des gendarmes, la suite de terme général $\ln\left(1 + \frac{2n}{x_n}\right)$ converge vers a.

5. Comme $\ln\left(1 + \frac{2n}{x_n}\right) \to a$, on a $1 + \frac{2n}{x_n} \to e^a$ (car la fonction exp est continue sur $\mathbb{R}$, donc en a) et donc $\frac{2n}{x_n} \to e^a - 1$. Par suite, $\frac{2n}{x_n} \sim e^a - 1$, donc $\frac{x_n}{2n} \sim \frac{1}{e^a-1}$, d'où $x_n \sim \frac{2n}{e^a-1} = \frac{2}{e^a-1} n$.

$\boxed{\delta = \frac{2}{e^a-1} \text{ convient.}}$