Réduction des matrices carrées

Exercices d'application directe du cours

Exercice 1 (Recherche de valeurs propres)

Dans chacun des cas suivants, **déterminer le spectre de la matrice** considérée en s'aidant au besoin des indications de l'énoncé.

1. $H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (on utilisera $P(x) = x^2 + x - 6$)
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
   Calculer A^2 et en déduire un polynôme annulateur de A.
3. $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer B^2.
4. $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
5. $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$
6. $N = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
7. $C = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$
8. $f : \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}); \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y-z \\ x+y-z \\ x+y-z \end{pmatrix}$.
   f est-il injectif ? En déduire une valeur propre de la matrice K associée à f dans la base canonique de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 2 (Recherche de vecteurs propres)

1. Vérifier que le vecteur $W = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de la matrice $R = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Préciser pour quelle valeur propre.
2. Vérifier que le vecteur $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de la matrice $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 4 & 5 & -5 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Préciser pour quelle valeur propre.

Exercice 3 (Recherche de sous-espace propre)

Montrer que 1 est valeur propre de la matrice A associée à l'endomorphisme f de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dans la base canonique et défini par $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x-z \\ y \\ 3x-2z \end{pmatrix}$. Déterminer une base et la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre 1.

Exercice 4 (Diagonalisable ou pas ?)

Donner des arguments rapides pour dire si les matrices suivantes sont diagonalisables :

$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & -5 & 4 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad A_4 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad A_5 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad A_7 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice 5 (Recherche des éléments propres et diagonalisation)

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$, $X_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $X_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ Calculer AX_1, AX_2 et AX_3 et en déduire le spectre de A, puis diagonaliser A.

Exercice 6 (Diagonalisation)

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. Vérifier que $A^3 = A$, A est-elle diagonalisable ? Si oui, la diagonaliser.
2. $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $(A-I)^2$, puis $(A-I)^3$, A est-elle diagonalisable ? Si oui, la diagonaliser.
3. $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$. Vérifier que 10 est valeur propre de C. C est-elle diagonalisable ? Si oui, la diagonaliser.

Exercice 7

Après l'avoir diagonalisée, calculer les puissances de $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 8 (Puissance de matrice)

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et I la matrice identité.

1. Déterminer $J \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A = 2I + J$
2. Calculer J^2 et J^3, en déduire J^n pour tout entier naturel n.
3. Calculer A^5.

Exercice 9 (Application à l'étude d'une suite récurrente linéaire d'ordre 3)

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{pmatrix}$ et pour tout entier naturel n, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$ avec la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 0, \quad u_1 = 2, \quad u_2 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \; u_{n+3} = 6u_{n+2} - 11u_{n+1} + 6u_n \end{cases}$

1. Déterminer une matrice A telle que $X_{n+1} = AX_n$. En déduire une expression de X_n en fonction de A, n et X_0.
2. Déterminer P inversible et D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.
3. Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 10 (diagonalisation banale)

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -3 & 4 & -3 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Calculer $f(1,1,1)$. Que peut-on en déduire ?
2. Calculer $A^2 - 2A$. En déduire un polynôme annulateur de A.
3. Montrer que les valeurs propres possibles de A sont -2 et 4.
4. Déterminer les sous-espaces propres de A.
5. A est-elle diagonalisable ? f est-il bijectif ?

Exercices d'approfondissement

Exercice 11 (Éléments propres par la réduite de Gauss - moins dans l'air du temps mais à avoir vu une fois)

Quels sont les éléments propres de la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 12 ("racine cubique" de matrice)

Soit $B = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$. Diagonaliser B puis déterminer une matrice A telle que $A^3 = B$.

Exercice 13 (Une chaine de Markov)

On dispose de deux jetons A et B que l'on peut placer cases C_0 et C_1, et d'une dispositif permettant de tirer au hasard et de manière équiprobable, l'une des lettre a, b ou c. Au début de l'expérience, les deux jetons sont placés dans C_0. On procède alors à une série de tirages indépendants de l'une des trois lettres a, b ou c. À la suite de chaque tirage, on effectue l'opération suivante :

- Si on tire la lettre a, on change le jeton A de case ;
- Si on tire la lettre b, on change le jeton B de case ;
- Si on tire la lettre c, les positions des deux jetons restent inchangées.

On introduit les variables X_n (respectivement Y_n) qui valent 0 si à l'issue de la n-ième expérience, le jeton A (resp. le jeton B) est dans la case C_0 et 1 si il est dans la case C_1. Naturellement $X_0 = Y_0 = 0$.

1. On introduit la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
   - **a.** Justifier que M est diagonalisable.
   - **b.** Déterminer les valeurs propres de M et une matrice P d'ordre 2 inversible telle que $P^{-1}MP$ soit diagonale.
   - **c.** En déduire l'expression de M^n, pour $n \in \mathbb{N}^*$

2.
   - **a.** Déterminer la loi de X_1.
   - **b.** À l'aide d'une système complet d'événements à préciser, déterminer une matrice Q telle que : $\begin{pmatrix} \mathrm{P}(X_{n+1} = 0) \\ \mathrm{P}(X_{n+1} = 1) \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} \mathrm{P}(X_n = 0) \\ \mathrm{P}(X_n = 1) \end{pmatrix}$
   - **c.** Expliciter Q^n, pour $n \in \mathbb{N}^*$.
   - **d.** En déduire la loi de X_n.

Exercices tirés ou inspirés d'annales

Exercice 14 (à la recherche de commutant - d'après EDHEC 2006)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 7 \\ 1 & 4 & 3 \\ -2 & -8 & -6 \end{pmatrix}$. On note I la matrice unité et O la matrice nulle de $M_3(\mathbb{R})$.

On pose $U = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et on note $\mathscr{B} = (E_1, E_2, E_3)$ la base canonique de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ avec $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $E_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1.
   - **a.** Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation $AX = 0$ est Vect(U).
   - **b.** La matrice A est-elle inversible ?

2.
   - **a.** Déterminer la matrice colonne V de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dont la 2-ième coordonnée dans $\mathscr{B}$ vaut 1, et telle que $AV = U$.
   - **b.** Démontrer que la matrice W de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dont la 2-ième coordonnée dans $\mathscr{B}$ vaut 1, et qui vérifie $AW = V$ est $W = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
   - **c.** Montrer que (U, V, W) est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ que l'on notera $\mathscr{B}'$. On note P la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$. Écrire P. (on ne calculera jamais P^{-1} mais on sait que P est inversible.)

3. On admet que $N = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. En déduire que, pour tout entier $k \geq 3$, on a $A^k = 0$.

4. On note C_N (respectivement C_A) l'ensemble des matrices de $M_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec N (respectivement A).
   - **a.** Montrer que C_N est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$ et que $C_N = Vect(I; N; N^2)$.
     On admet que C_A est aussi un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$.
   - **b.** Établir que "$M \in C_A$" $\Leftrightarrow$ "$P^{-1}MP \in C_N$". (Rappel : ne pas calculer P^{-1})
     En déduire que $C_A = Vect(I; A; A^2)$. Quelle est la dimension de C_A ?

Exercice 15 (Extrait d'ESSEC II 2016)

Soit $p \in]0,1[$. Diagonaliser la matrice $M = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 16 (Inspiré de EML 1993 et remis au goût du jour : suites imbriquées)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

1. S'aider au mieux du code python suivant pour Déterminer les valeurs propres de A et une vase de chacun de ses sous-espaces propres. (on notera λ_1, λ_2 et λ_3 ces valeurs propres de sorte que $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$)

```python
import numpy as np
import numpy.linalg as al
A=np.array([[1,0,-1],[0,1,0],[-1,2,1]])
```

```
>>> # script executed
>>> al.eig(A)
(array([2., 0., 1.]), array([[ 0.70710678,  0.70710678,  0.894
42719],
       [ 0.        ,  0.        ,  0.4472136 ],
       [-0.70710678,  0.70710678,  0.        ]]))
>>>
```

2. A est-elle inversible ?
3. Expliciter une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$.
4. Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}$, explicitement la matrice A^n.
5. Application : On considère les suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies par la donnée de leurs premiers termes u_0, v_0 et w_0 et par les relations de récurrence : $\left\{\begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & u_n - w_n \\ v_{n+1} & = & v_n \\ w_{n+1} & = & -u_n + 2v_n + w_n \end{array}\right.$

   Exprimer le terme général, en fonction de n, de chacune des trois suites.