Réduction des matrices carrées

Exercices d'application directe du cours

Exercice 1 (Recherche de valeurs propres)

Dans chacun des cas suivants, **déterminer le spectre de la matrice** considérée en s'aidant au besoin des indications de l'énoncé.

1. • $H^2 = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ -4 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ et on constate que $H^2 + H = 6I$
donc le polynôme $P = x^2 + x - 6$ proposé est bien un polynôme annulateur de H.
• Or P a pour racines -3 et 2 et donc les valeurs propres de H sont **sont à chercher parmi** ces valeurs.
• $H - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est non inversible (une ligne nulle), donc 2 est bien valeur propre de H.
• $H + 3I = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ est non inversible (les deux premières lignes sont identiques) donc -3 est aussi valeur propre de H.
• Conclusion : $\text{Sp}(H) = \{2; -3\}$

2. • $A^2 = 4A$ donc $P = x^2 - 4x = x(x-4)$ est polynome annulateur de A.
• Les valeurs propres de A sont à chercher parmi $\{0, 4\}$.
• Puisque A est non inversible (la première et la dernière colonnes sont égales), 0 est valeur propre de A.
• $A - 4I = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$. En remarquant que dans la matrice $A - 4I$, $C_1 - C_2 - C_3 + C_4 = 0$, on en déduit que $C_1 = C_2 + C_3 - C_4$, et puisqu'une colonne peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres, on en déduit que $A - 4I$ est non inversibe.
Rque : dire que la combinaison linéaire $C_1 - C_2 - C_3 + C_4 = 0$ revient à effectuer le produit $\begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Tout ceci signifie donc que -4 est bien valeur propre de A (et on a même trouvé en prime un vecteur propre associé !
• Conclusion : $\text{Sp}(A) = \{0; -4\}$

3. • $B^2 = -I$. Donc $P = x^2 + 1$ est polynôme annulateur de B.
• Comme les valeurs propres de B sont à chercher parmi les racines de P et qu'il n'en a aucune, B n'a pas de valeur propre.
• Conclusion : $\text{Sp}(B) = \emptyset$

4. • T est une matrice triangulaire, on lit donc ses valeurs propres sur sa diagonale.
• Conclusion : $\text{Sp}(T) = \{1; -1, 3\}$

5. • $\lambda \in \text{Sp}(M) \Leftrightarrow M - \lambda I$non inversible $\Leftrightarrow \det(M - \lambda I) = 0$
Or $\det(M - \lambda I) = (1-\lambda)(-2-\lambda) - 10 = \lambda^2 + \lambda - 12$
Les racines de ce trinôme étant -4 et 3
• $\text{Sp}(M) = \{-4, 3\}$

6. Même méthode : $\text{Sp}(N) = \{1; 3\}$

7. Même méthode, mais le polynôme en λ n'a aucune racine.
$\text{Sp}(C) = \emptyset$

8. f n'est pas injectif car $\ker(f) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Puisque f est un endomorphisme, cela signifie qu'il n'est pas bijectif, et donc que sa matrice K n'est pas inversible. Cela signifie que 0 est valeur propre de K.

Exercice 2 (Recherche de vecteurs propres)

1. $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ associée à la valeur propre 3.
2. Idem. U est un vecteur propre de B associé à la valeur propre 4.

Exercice 3 (Recherche de sous-espace propre)

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ petit calcul utile à faire au brouillon : $A - I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$X \in E_1(A) \quad \Leftrightarrow \quad (A - I)X = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x - z = 0 \\ 0 = 0 \\ 3x - 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \; x = z \qquad \text{donc } E_1(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \qquad \dim(E_1(A)) = 1$$

Exercice 4 (Diagonalisable ou pas ?)

• $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ est diagonalisable car on voit ses valeurs propres sur sa diagonale (en tant que matrice triangulaire) et c'est une matrice d'ordre 3 admettant 3 valeurs propres distinctes.

• $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas diagobalisable car on voir ses propres sur sa diagonale (en tant que matrice triangulaire). Sa seule valeur propre est 0. Si elle était diagonalisable elle serait semblable à la matrice nulle. Or seule la matrice nulle est semblable à la matrice nulle et A_2 n'est pas nulle. Donc elle ne peut pas être diagonalisable.

• $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & -5 & 4 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable car c'est une matrice symétrique (par application du théorème spectral)

• $A_4 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable car si c'était le cas, elle serait semblable à $4I$ et donc égale à $4I$, ce qui n'est pas le cas. En effet, elle est triangulaire et on voit sur sa diagonale que son spectre est réduit à $\{4\}$

• $A_5 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable car en cherchant son spectre comme dans l'ex 1, question 7, on ne trouve pas de valeur propre.

• $A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ est diagonalisable puisquelle est diagonale !

• $A_7 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ est diagonalisable car elle est symétrique (théorème spectral).

Exercice 5 (Recherche des éléments propres et diagonalisation)

• Grâce aux indications de l'énoncé, on déduit facilement que X_1 est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 0, X_2 un vecteur propre associé à la valeur propre 1 et X_3 un vecteur propre associé à la valeur propre 2.

Il ne peut pas y avoir d'autre valeur propre puisque A est d'ordre 3 et que l'on a déjà trouvé trois valeurs propres distinctes, donc $\mathrm{Sp}(A) = \{0,1,2\}$.
• De plus, puisque (X_1, X_2, X_3) est une famille libre (comme famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes) de cardinal 3, elle constitue donc une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et A est diagonalisable.
On peut par exemple choisir $D = \mathrm{diag}(0,1,2)$ et $P = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et les formules de changement de base donnent que $A = PDP^{-1}$.

Exercice 6 (Diagonalisation)

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. Vérifier que $A^3 = A$, A est-elle diagonalisable ? Si oui, la diagonaliser.
2. $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $(A-I)^2$, puis $(A-I)^3$, A est-elle diagonalisable ? Si oui, la diagonaliser.
3. $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$. Vérifier que 10 est valeur propre de C. C est-elle diagonalisable ? Si oui, la diagonaliser.

Exercice 7

Après l'avoir diagonalisée, calculer les puissances de $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

• $\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \Leftrightarrow A - \lambda I$ non inversible $\Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0$ Or $\det(A - \lambda I) = (-1-\lambda)^2 - 9 = (-1-\lambda-3)(-1-\lambda+3) = (-4-\lambda)(2-\lambda)$
• Donc $\mathrm{Sp}(A) = \{2, -4\}$
• On trouve facilement $E_2(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $E_{-4}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$
• On en déduit que $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
• Un raisonnement par récurrence (laissé au lecteur) permet de prouver que pour tout n naturel, $A^n = PD^nP^{-1}$.
• Or D étant diagonale, $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-4)^n \end{pmatrix}$ De plus, $P^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}P$
• On en déduit que pour tout n naturel, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-4)^n \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2^n & (-4)^n \\ 2^n & -(-4)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2^n+(-4)^n & 2^n-(-4)^n \\ 2^n-(-4)^n & 2^n+(-4)^n \end{pmatrix}$

Exercice 8 (Puissance de matrice)

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et I la matrice identité.

1. $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2. $J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J^3 = J$, on en déduit $J^{2n} = J^2$ et $J^{2n+1} = J$ pour tout entier naturel n non nul (à montrer par récurrence).
3. Pour calculer A^5, c'est une formule du binôme de Newton qui va servir mais, une fois n'est pas coutume, il n'y a pas de matrice nilpotente dans la somme de départ :
   Pour déterminer les coefficient binomiaux qui serviront dans cette formule, le plus rapide est d'ébaucher rapidement au brouillon le triangle de Pascal :

1					
1	1				
1	2	1			
1	3	3	1		
1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1

Il ne reste plus qu'à appliquer la formule pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} A^n &= (J + (2I))^5 \\ &= \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} J^k (2I)^{5-k} \\ &= (2I)^5 + 5J(2I)^4 + 10J^2(2I)^3 + 10J^3(2I)^2 + 5J^4(2I) + J^5 \\ &= 32I + 80J + 80J^2 + 40J + 10J^2 + J \\ &= 90J^2 + 81J + 121I \\ &= \begin{pmatrix} 122 & 0 & 121 \\ 0 & 32 & 0 \\ 121 & 0 & 122 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exercice 9 (Application à l'étude d'une suite récurrente linéaire d'ordre 3)

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{pmatrix}$ et pour tout entier naturel n, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$ avec la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 0, \quad u_1 = 2, \quad u_2 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \; u_{n+3} = 6u_{n+2} - 11u_{n+1} + 6u_n \end{cases}$

1. C'est la matrice A proposée par l'énoncé. Une récurrence évidente permet de montrer que pour tout entier naturel n, $X_n = A^n X_0$
2. On diagonalise A avec les moyens usuels et on trouve $D = \mathrm{diag}(1,2,3)$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$ tels que $A = PDP^{-1}$

3. Une récurrence classique permet de montrer que pour tout entier naturel n, $A^n = PD^nP^{-1}$
Or $D^n = \text{diag}(1, 2^n, 3^n)$ puisque D est diagonale.
On obtient donc X_n en calculant le produit $P \cdot \text{diag}(1, 2^n, 3^n)P^{-1}X_0$, puis u_n en déterminant la première composante du vecteur colonne obtenu, ce qui revient à faire le produit matriciel $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} P \cdot \text{diag}(1, 2^n, 3^n)P^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.
Or $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 \\ -6 & 8 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ Une fois les calculs faits, il reste que $u_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{diag}(1, 2^n, 3^n)\begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 \\ -6 & 8 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2^n & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} = -4 + 6 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n$

Exercices tirés ou inspirés d'annales

Exercice 14 (à la recherche de commutant - d'après EDHEC 2006)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 7 \\ 1 & 4 & 3 \\ -2 & -8 & -6 \end{pmatrix}$. On note I la matrice unité et O la matrice nulle de $M_3(\mathbb{R})$.

On pose $U = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et on note $\mathscr{B} = (E_1, E_2, E_3)$ la base canonique de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ avec $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $E_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. **a.** Question habituelle dont la résolution ne doit pas poser de problème.
   b. La matrice A n'est pas inversible . Si elle l'était, la relation $AX = 0$ donnerait $A^{-1}AX = A^{-1}0$ donc $X = 0$ serait la seule solution de $AX = 0$ ce qui n'est pas le cas d'après la question précédente.
2. **a.** On cherche un vecteur $V = \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ z \end{pmatrix}$ tel que $AV = U$.
   $$AV = U \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 7z + 10 = 2 \\ x + 3z + 4 = 1 \\ -2x - 6z - 8 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 7z = -8 \\ x + 3z = -3 \\ -2x - 6z = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 - 3z \\ 2(-3 - 3z) + 7z = -8 \\ -2(-3 - 3z) - 6z = 6 \end{cases} \quad \text{Au final, } V = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$
   b. On procède de la même manière que dans la question précédente.
   c. La famille (U, V, W) est une famille de trois vecteurs dans un espace vectoriel $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ qui est de dimension 3. Il suffit donc de montrer qu'elle est libre pour montrer qu'elle forme une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
   Soient a, b, c trois réels tels que $aU + bV + cW = 0$ blablabla $a = b = c = 0$ On est contents la famille est libre et on a bien ce que l'on veut.
   $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.
3. Comme $N = P^{-1}AP$, $A = PNP^{-1}$.
   Or $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = 0$, donc pour tout $k \geq 3$, $N^k = 0$.
4. **a.** On nous demande non seulement de montrer que C_N est un sous-espace vectoriel, mais aussi d'en trouver une famille génératrice. Du coup, plutôt que de le montrer en revenant à la caractérisation en 3 points d'un sev, on détermine C_N par le calcul.
   Une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ commute avec N si elle vérifie $MN = NM$.
   Or $MN = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & d & e \\ 0 & g & h \end{pmatrix}$ et $NM = \begin{pmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   Donc $MN = NM \Leftrightarrow a = e = i$, $b = f$, $d = g = h = 0$ et c quelconque.
   Autrement dit, $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = aI + bN + cN^2$.
   Ainsi une matrice M appartient à C_N si et seulement si elle est combinaison linéaire de I, N et N^2.
   On a donc bien $C_N = \text{Vect}(I, N, N^2)$ et a fortiori un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
   b. Comme $A = PNP^{-1}$, on a $M \in C_A \Leftrightarrow MA = AM \Leftrightarrow MPNP^{-1} = PNP^{-1}M \Leftrightarrow P^{-1}MPNP^{-1} = NP^{-1}M \Leftrightarrow P^{-1}MPN = NP^{-1}MP \Leftrightarrow P^{-1}MP \in C_N$.
   On a bien $M \in C_A \Leftrightarrow P^{-1}MP \in C_N$.
   D'après la question précédente, $P^{-1}MP \in C_N$ si et seulement si il existe trois réels a, b et c tels que $P^{-1}MP = aI + bN + cN^2$ autrement dit si et seulement si il existe A, B, C tels que $M = P(aI + bN + cN^2)P^{-1}$.
   Comme $P(aI + bN + cN^2)P^{-1} = aPIP^{-1} + bPNP^{-1} + cPN^2P^{-1} = aI + bA + cA^2$ (car on a vu que $A^k = PN^kP^{-1}$ pour tout k), on a montré que $M \in C_A$ si et seulement si il existe trois réels a, b, c tels que $M = aI + bA + cA^2$.
   Ainsi, $C_A = \text{Vect}(I, A, A^2)$
   La famille (I, A, A^2) est génératrice est génératrice de C_A. Il reste à voir si elle est libre. Repasser par N semble être une bonne idée. Soient a, b, c réels tels que $aI + bA + cA^2 = 0$. $P^{-1}(aI + bA + cA^2)P^{-1} =$ et donc, en développant, $aI + bN + cN^2 = 0$.
   Or compte tenu des calculs précédents, $aI + bN + cN^2 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ donc si $aI + bN + cN^2 = 0$, alors $a = b = c = 0$.
   La famille (I, A, A^2) est donc libre. Il s'agit finalement d'une base de C_A, ce qui prouve que la dimension de C_A est 3.