Développements limités

Exercice 1 (Développements limités)

Calculer le développement limité à l'ordre 1 ou 2 (le plus possible) au voisinage de 0 des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto e^x - 1 - x$
2. $x \mapsto x\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)$
3. $x \mapsto \dfrac{x}{x-1}$
4. $x \mapsto \dfrac{e^{-2x}-1}{x}$
5. $\star$ $x \mapsto \dfrac{x-1}{1+x^2}$
6. $\star$ $x \mapsto \dfrac{x}{x+3}$

Exercice 2 (Applications des développements limités au calcul de limite)

Déterminer les limites suivantes :

1. $\star$ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{x}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}$

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x) = \frac{e^x-1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 1 & \text{sinon} \end{cases}$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer $f'(0)$.
   Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f en 0.
3. Préciser localement la position relative de la courbe et de la tangente et la convexité locale.
   Pour cette dernière question, on admettra qu'il existe une fonction ε définie sur $\mathbb{R}$ et ayant pour limite 0 en 0 telle que pour tout réel x, $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)$.

Exercice 4

Déterminer la tangente en 0 à la courbe représentative de f et la position relative de la courbe et de la tangente. $f(x) = 2x^2 - xe^x$

Exercices tirés d'annales

Exercice 5 (extrait d'Ecricome)

Soit f définie par $f(0) = 1$ et $f(x) = \frac{x}{\ln(1+x)}$ si $x > 0$.

1. Montrer que f est continue sur $[0;+\infty[$.
2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0;+\infty[$.
3. Donner le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de $x - \ln(1+x)$, puis déterminer un équivalent simple de $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ lorsque x tend vers 0.
4. Prouver que f est dérivable sur $[0;+\infty[$

Exercice 6 (extrait d'EDHEC)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f_n la fonction définie par $f_n(x) = xe^{-\frac{n}{x}}$ pour tout $x > 0$

1. Donner le développement limité à l'ordre 2 de e^u lorsque u est un voisinage de 0.
2. En déduire qu'au voisinage de $+\infty$, on a : $f_n(x) = x - n + \frac{n^2}{2x} + \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right)$
3. En déduire un équivalent de $f_n(x)$, puis la limite de $f_n(x)$ et celle de $f_n(x) - x$ quand x tend $+\infty$.