

Développements limités - Éléments de correction

Exercice 1 (Développements limités)

Calculer le développement limité à l'ordre 1 ou 2 (le plus possible) au voisinage de 0 des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto e^x - 1 - x$

$$e^x \underset{0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad \text{donc } e^x - 1 - x \underset{0}{=} \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

2. $x \mapsto x \ln\left(1 + \frac{x}{2}\right)$

$$\ln\left(1 + \frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2} + x^2 \varepsilon(x) \quad \text{avec } \varepsilon(x) \underset{0}{\rightarrow} 0 \quad \text{donc } x \ln\left(1 + \frac{x}{2}\right) = x \times \frac{x}{2} - x \times \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2} + x^3 \varepsilon(x)$$

$$x \ln\left(1 + \frac{x}{2}\right) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{8} + x^3 \varepsilon(x) \quad \text{c'est-à-dire } x \ln\left(1 + \frac{x}{2}\right) \underset{0}{=} \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{8} + o(x^3)$$
 En tronquant, on obtient :
$$x \ln\left(1 + \frac{x}{2}\right) \underset{0}{=} \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

3. $x \mapsto \frac{x}{x-1}$ réponse brute à étoffer d'une rédaction convaincante :
$$\frac{x}{x-1} \underset{0}{=} -x - x^2 + o(x^2)$$

4. $x \mapsto \frac{e^{-2x} - 1}{x}$ réponse brute à étoffer d'une rédaction convaincante :
$$\frac{e^{-2x} - 1}{x} = -2 + 2x + o(x) \quad (\text{les formules du cours ne permettent pas d'avoir un DL2 pour cet exemple})$$

5. $x \mapsto \frac{x-1}{1+x^2}$ réponse brute à étoffer d'une rédaction convaincante :
$$\frac{x-1}{1+x^2} = -1 + x + x^2 + o(x^2)$$

6. $x \mapsto \frac{x}{x+3}$ réponse brute à étoffer d'une rédaction convaincante :
$$\frac{x}{x+3} = \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + o(x^2)$$

Exercice 2 (Applications des développements limités au calcul de limite)

1. Recherche de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x}$

Compréhension du problème et plan d'attaque :

Il s'agit d'une forme indéterminée du type $\infty - \infty$

On voit que si l'on passe par les équivalents, on est dans une impasse parce que l'on ne peut pas soustraire les équivalents.

On pense donc à mettre tout au même dénominateur et s'aider ensuite des DL pour déterminer un équivalent du numérateur et du dénominateur, puis conclure.

- $$\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} = \frac{x - e^x + 1}{(e^x - 1)x}$$

- Or $e^x \underset{0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ donc $x - e^x + 1 \underset{0}{=} -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$

- Une fonction étant équivalente au premier terme non nul de son développement limité, on en déduit que $x - e^x + 1 \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$.

- On sait de plus $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$ donc par produit $(e^x - 1)x \underset{0}{\sim} x^2$

- donc par quotient des équivalents trouvés pour le numérateur et le dénominateur, et après simplification par x^2 :

$$\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \underset{0}{\sim} -\frac{1}{2} \quad \text{c'est à dire} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} = -\frac{1}{2}$$

2. Recherche de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$

- $\ln(1+x) \underset{0}{=} x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ donc $\ln(1+x) - x \underset{0}{=} -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$

- Une fonction étant équivalente au premier terme non nul de son développement limité, on en déduit que $\ln(1+x) - x \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$

- par quotient, et après simplification par x^2 :
$$\frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \underset{0}{\sim} -\frac{1}{2} \quad \text{d'où} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
$$\begin{cases} f(x) = \frac{e^x - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

On peut répondre rapidement aux trois questions à la fois en cherchant le développement limité à l'ordre 2 de $\frac{e^x - 1}{x}$: En effet, puisque $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon(x)$, on en déduit que pour $x \neq 0$, $\frac{e^x - 1}{x} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + x^2 \varepsilon(x)$, c'est à dire $\frac{e^x - 1}{x} \underset{0}{=} 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2)$.

Puisque cette fonction admettant bien un développement limité d'ordre 2, elle est dérivable (donc continue) en 0 avec $f(0) = 1$ (ce qui correspond à la valeur imposée par l'énoncé) et $f'(0) = \frac{1}{2}$

L'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en 0 est $y = \frac{1}{2}x + 1$ et puisque le coefficient de x^2 du développement limité est positif, on sait que la courbe est située localement en 0 au dessus de sa tangente.

Exercices tirés d'annales

Exercice 5 (extrait d'Ecricome)

Soit f définie par $f(0) = 1$ et $f(x) = \frac{x}{\ln(1+x)}$ si $x > 0$.

1. La fonction f est continue sur $]0, +\infty[$ comme quotient de composées de sommes de fonctions usuelles dans lequel le dénominateur ne s'annule pas.

De plus, $f(x) = \frac{x}{\ln(1+x)} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{x} \longrightarrow 1 = f(0)$, donc f est continue en 0 et, par suite, sur $[0, +\infty[$.

2. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ comme quotient de composées de sommes de fonctions usuelles dans lequel le dénominateur ne s'annule pas.

3. D'après le cours,

$$x - \ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x^2/2 + o(x^2).$$

Par conséquent, pour $x > 0$,

$$\begin{aligned} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \\ &= \frac{x - \ln(1+x)}{x \ln(1+x)} \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x^2/2 + o(x^2)}{x \ln(1+x)} \\ &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2/2}{x^2} \\ &= \boxed{1/2}. \end{aligned}$$

4. Puisque $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ admet une limite finie (en l'occurrence 1/2) lorsque $x \rightarrow 0$, on en déduit que f est dérivable en 0 (et que $f'(0) = 1/2$). Comme elle l'est également sur $]0, +\infty[$, elle l'est donc finalement sur $[0, +\infty[$.