Séries

Exercices d'application directe du cours

Exercice 1

1. Soit (u_n) une suite telle que $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n^2}$. Montrer que $\sum u_n$ converge.
2. Soit (u_n) une suite telle que $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $1 \leq u_n \leq 1 + \frac{1}{n^2}$.
   a. Montrer que (u_n) converge.
   b. Quelle est la nature de $\sum u_n$?
3. Soit (u_n) la suite de terme général $u_n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$, définie pour $n \in \mathbb{N}^\star$ Étude de la convergence de $\sum u_n$ par deux méthodes :
   a. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, calculer $\sum_{k=1}^{n} u_k$ et en déduire la nature de la série.
   b. Donner un équivalent de u_n et retrouver le résultat quant à la convergence de la série.

Exercice 2 (Convergence et calcul de sommes)

Prouver la convergence de la série de terme général u_n dans chacun des cas suivants, et calculer sa somme :

1. $u_n = \frac{n+1}{2^n}$
2. $u_n = \frac{n^2+2^n}{4^n}$
3. $u_n = (-1)^n e^{-n}$
4. $u_n = (-1)^n n e^{-2n}$
5. $u_n = \frac{n(n+3)}{3^{n+2}}$
6. $u_n = \frac{n+3^n}{n!}$
7. $u_n = \frac{n(n-1)}{2^n n!}$
8. $u_n = \frac{2^n}{(n+2)!}$
9. $u_n = \frac{1}{4n^2-1}$ (chercher a et b tels que $\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2n-1} + \frac{b}{2n+1}\right)$ $\forall k \in \mathbb{N}$)
10. $u_n = \frac{2}{n(n-2)}$, $n \geq 3$ (chercher a et b tels que $\frac{2}{n(n-2)} = \frac{a}{n-2} + \frac{b}{n}$ $\forall n \geq 3$)

Exercice 3 (Nature de séries)

Déterminer la nature de la série de terme général u_n dans chacun des cas suivants (on ne demande PAS de calculer la somme dans le cas de convergence) :

1. $u_n = \frac{n^2-3}{n^\alpha + \ln n}$, avec $\alpha > 0$
2. $u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)$
3. $u_n = \frac{\sqrt{n}(\ln n)^2}{e^n}$
4. $u_n = e^{-\sqrt{n}}$
5. $u_n = \frac{(-1)^n}{n^3}$
6. $u_n = \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$

Exercices d'approfondissement

Exercice 4 (Convergence et calculs de sommes)

1. $u_n = \frac{2n^3+n^2-4n-2}{n!}$ **2.** $u_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$, $n \geqslant 2$ **3.** $u_n = \frac{1+2+\cdots+n}{1+2^3+\cdots+n^3}$ **4.** $u_n = \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

Exercice 5 (Très classique : autour de la série harmonique)

Soit $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ la somme d'ordre n de la série harmonique.

1. Quelle est la limite de H_n ?
2. On cherche un équivalent de H_n.
   a. Montrer que pour tout $k \geq 2$, $\frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{k-1}$ et en déduire que $H_n - 1 \leq \ln n \leq H_{n-1}$.
   b. En déduire un équivalent de H_n.
3. On pose $u_n = H_n - \ln n$, et $v_n = u_n - u_{n-1}$
   a. Montrer que la série de terme général v_n converge si et seulement si la suite (u_n) converge.
   b. Montrer que la série de terme général v_n converge.
   c. Montrer que la suite $H_n - \ln n$ converge vers une constante. Cette constante est la constante d'Euler, et est notée γ. On ne sait presque rien sur γ, sinon une valeur proche de 0,577...

Exercice 6 (Très classique : Série harmonique alternée)

1. Calculer, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^1 (-t)^{k-1} dt$.
2. En sommant la relation obtenue, montrer que, pour tout $n \geq 1$, $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln(2) - \int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t} dt$
3. Montrer que $\forall n \geq 1$, $0 \leq \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt \leq \frac{1}{n+1}$ et en déduire la limite de $\int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt$ quand $n \to +\infty$.
4. Prouver que $\sum \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ converge et déterminer sa somme.

Exercice 7 (Très classique : Série harmonique alternée, autre démo)

Considérons $S_n = \sum_{k=1}^{n} = \frac{(-1)^k}{k}$

1. La série de terme général $\frac{(-1)^n}{n}$ est-elle absolument convergente ?
2. Montrer que les suites extraites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
3. Que peut-on en déduire pour la série ?

On veut maintenant trouver la valeur de la somme.

4. On pose, pour tout entier $n \geq 1$, $I_n = \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{(1+t)^{n+1}}\,\mathrm{d}t$
   a. En intégrant par parties, montrer que, pour tout entier $n \geq 1$ $I_{n+1} = \frac{1}{n+1}$
   b. Calculer I_0 et I_1
   c. En déduire que, pour toute entier $n \geq 1$, $S_n = -\ln 2 + (-1)^n I_n$
   d. Montrer que la suite (I_n) converge et déterminer sa limite
   e. En déduire la somme de la série de terme général $\frac{(-1)^n}{n}$

Remarque : on a utilisé dans les questions 2 et 3 une technique qui peut être mobilisée pour montrer que si (a_n) est une suite décroissante et telle que $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, alors la série de terme général $(-1)^n a_n$ converge. À savoir reproduire ! !

Exercice 8

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
2. Montrer que la suite (u_n) est monotone et donner son sens de variation.
3. Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.
4. On note $v_n = \ln(u_n)$ pour tout entier naturel n. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} u_k = v_0 - v_{n+1}$.
5. En déduire que la série $\sum u_n$ diverge.

Un exercices tiré d'annales

Exercice 9 (d'après EML 2002)

1. **Étude préliminaire**

   On admet, pour tout entier naturel k et tout réel x de $[0;1[$, que la série $\sum_{n\geq k} \binom{n}{k} x^n$ est convergente et on note $s_k(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n$.
   a. Vérifier, pour tout réel x de $[0;1[$: $s_0(x) = \frac{1}{1-x}$ et $s_1(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$.
   b. Pour tout couple d'entiers naturels (n,k) tel que $k < n$, montrer : $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$.
   c. Pour tout entier naturel k et tout réel x de $[0;1[$, déduire de la question précédente : $s_{k+1}(x) = x s_k(x) + x s_{k+1}(x)$.
   d. Montrer, par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1[,\quad s_k(x) = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$.

2. **Étude d'une expérience aléatoire.**

   On considère une urne contenant une boule noire et quatre boules blanches. On effectue l'expérience aléatoire suivante :
   - On commence par tirer des boules de l'urne une à une avec remise jusqu'à obtenir la boule noire (que l'on remet aussi dans l'urne).
     On définit la variable aléatoire N égale au nombre de tirages avec remise nécessaires pour obtenir la boule noire.
   - Puis, si N prend une valeur entière positive non nulle notée n, on réalise alors une seconde série de n tirages dans l'urne, toujours avec remise.
     On définit la variable aléatoire X égale au nombre de fois où la boule noire a été obtenue dans cette seconde série de tirages.

   a. Déterminer la loi de la variable aléatoire N. Donner son espérance.
   b. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la probabilité conditionnelle $\mathrm{P}(X = k / N = n)$.
   c. Vérifier : $\mathrm{P}(X = 0) = \frac{4}{9}$.
   d. En utilisant l'étude préliminaire, montrer : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\quad \mathrm{P}(X = k) = \frac{25}{36}\left(\frac{4}{9}\right)^k$.
   e. Montrer que X admet une espérance $\mathrm{E}(X)$ et calculer $\mathrm{E}(X)$.
   f. Montrer : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{P}(X \leq k) = 1 - \frac{5}{9}\left(\frac{4}{9}\right)^k$.