# Séries - Éléments de correction

## Exercices d'application directe du cours

### Exercice 1

Prouver la convergence de la série de terme général $u_n$ dans chacun des cas suivants, et calculer sa somme :

1. Soit $(u_n)$ une suite telle que $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n^2}$.
   $u_n$ et $\frac{1}{n^2}$ étant les termes généraux de deux séries à termes positifs, d'après le critère de majoration du théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\frac{1}{n^2}$ étant le terme général d'une série de Riemann convergente (2>1), on en déduit que $\sum u_n$ converge également.
2. Soit $(u_n)$ une suite telle que $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $1 \leq u_n \leq 1 + \frac{1}{n^2}$.
   **a.** $(u_n)$ converge vers 1 d'après le théorème des gendarmes.
   **b.** $\sum u_n$ diverge grossièrement puisque son terme général ne tend pas vers 0.
3. Soit $(u_n)$ la suite de terme général $u_n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$, définie pour $n \in \mathbb{N}^\star$
   **a.** Pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, $u_k = \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \ln(k+1) - \ln(k)$. On reconnaît une somme télescopique.
   Donc pour $n > 0$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k = \ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc $\sum u_n$ diverge.
   **b.** $u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$, terme général de la série harmonique divergente. Donc puisque ces deux séries sont à termes positifs, d'après le critère d'équivalence du théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum u_n$ diverge.

### Exercice 2 (Convergence et calcul de sommes)

1. Série de terme général $u_n = \frac{n+1}{2^n}$
   La série est à termes positifs. On va se ramener à des sommes usuelles.
   Rappelons que si $|q| < 1$, alors $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$
   Pour tout entier naturel $n$, $u_n = \frac{n+1}{2^n} = n\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} \times n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^n$
   La série de terme général $u_n$ converge en tant que combinaison linéaire d'une série géométrique dérivée première et d'une série géométrique convergentes $(-1 < 1/2 < 1)$
   Les formules rappelées plus haut appliquées à $q = \frac{1}{2}$ donnent finalement : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{1}{2} \times \frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 + 2 = 4$
   La somme de la série vaut donc 4.
2. Série de terme général $u_n = \frac{n^2+2^n}{4^n}$
   Après calculs sur le t.g., on reconnaît la combinaison linéaire d'une série dérivée géométrique d'ordre 2 et de raison 1/4, d'une série géométrique dérivée d'ordre 1 et de raison 1/4 et d'une série géométrique de raison 1/2. La somme vaut $\frac{74}{27}$.
3. Série de terme général $u_n = (-1)^n e^{-n} = \left(\frac{-1}{e}\right)^n$ : il s'agit d'une simple série géométrique de raison $-\frac{1}{e} \in ]-1;1[$. Elle converge donc et sa somme vaut $\frac{1}{1+\frac{1}{e}} = \frac{e}{e+1}$. La somme vaut $\frac{e}{e+1}$.
4. Série de terme général $u_n = (-1)^n n e^{-2n} = n\left(-\frac{1}{e^2}\right)^n = -\frac{1}{e^2} n\left(-\frac{1}{e^2}\right)^{n-1}$ : on travaillera donc avec une série géométrique dérivée d'ordre 1. La somme vaut $\frac{e^2}{e^2+1}$.
5. Série de terme général $u_n = \frac{n(n+3)}{3^{n+2}}$ : même technique que dans le **1.**. On trouve que la série converge et que sa somme vaut $\frac{5}{12}$. La somme vaut $\frac{5}{12}$.
6. Série de terme général $u_n = \frac{n+3^n}{n!}$ : On reconnait la combinaison linéaire de deux séries exponentielles. La somme vaut $e + e^3$.
7. Série de terme général $u_n = \frac{n(n-1)}{2^n n!}$ : multiple d'une série exponentielle. La somme vaut $\frac{1}{4}e^{1/2}$.
8. Série de terme général $u_n = \frac{2^n}{(n+2)!}$ : après manipulation sur le t.g., on reconnait le multiple d'une série exponentielle tronquée de ses premiers termes. La somme vaut $\frac{1}{4}(e^2 - 3)$.
9. Série de terme général $u_n = \frac{1}{4n^2-1}$ On reconnait une série télescopique. La série converge et sa somme vaut $-\frac{1}{2}$. La somme vaut $-1$.
10. Série de terme général $u_n = \frac{2}{n(n-2)}$. Se traite comme une série télescopique. La somme vaut $\frac{3}{2}$.

### Exercice 3 (Nature de séries)

1. On remarque que pour tout $n$, $u_n \geqslant 0$. De plus, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^2}{n^a} = \frac{1}{n^{a-2}}$. Or la série de terme général $\frac{1}{n^{a-2}}$ est une série de Riemann, qui converge si et seulement si $a-2>1$, c'est-à-dire si et seulement si $a>3$. Ainsi, d'après le critère de comparaison par équivalent des séries à termes positifs, $\boxed{\text{la série de terme général } u_n \text{ converge si et seulement si } a>3}$.
2. Comme $\frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et que $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, on en déduit que $u_n \sim \frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{n}$. Or la série de terme général $\frac{1}{n}$ diverge (c'est la série harmonique), donc, par le critère de comparaison des séries à termes positifs, $\boxed{\text{la série de terme général } \ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right) \text{ diverge}}$.
3. Tout d'abord $u_n \geqslant 0$ pour tout $n$. De plus, $n^2u_n = \frac{n^{3/2}(\ln(n))^2}{e^n} = \frac{n^{3/2}}{e^{n/2}}\frac{(\ln(n))^2}{e^{n/2}}$, et les deux opérandes du produit tendent vers 0 par croissances comparées, donc $n^2u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Autrement dit, $u_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Comme la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, le théorème de comparaison des séries à termes positifs montre que $\boxed{\text{la série de terme général } u_n = \frac{\sqrt{n}(\ln n)^2}{e^n} \text{ converge}}$
4. Bien sûr, $u_n \geqslant 0$ pour tout $n$. De plus, on voit une exponentielle, on pense donc à utiliser une négligeabilité. $n^2u_n = n^2e^{-\sqrt{n}} = e^{2\ln(n)-\sqrt{n}}$. Or $2\ln(n)-\sqrt{n} = -\sqrt{n}\left(2\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}+1\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ car par croissances comparées $\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} \to 0$. Donc, comme $e^x \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$, $n^2u_n \to 0$ : $u_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ au voisinage de $+\infty$. La série de terme général $\frac{1}{n^2}$ étant une série de Riemann convergente, le théorème de comparaison des séries à termes positifs montre que $\boxed{\text{la série de terme général } u_n \text{ converge}}$.
5. On regarde l'absolue convergence. $|u_n| = \frac{1}{n^3}$ qui est le terme général d'une série de Riemann convergente car $3>1$. Ainsi, la série de terme général $u_n$ est absolument convergente. Elle est donc en particulier convergente.
6. Ici, la convergence absolue n'aide pas ! L'idée, pour se débarrasser des $(-1)^n$ est de regrouper chaque terme pair avec le terme impair qui suit. Soit $(u_n)$ le terme général de cette série. $\sum u_n$ est de même nature que $\sum v_n$ où $v_n = u_{2n}+u_{2n+1}$. Or $v_n = \frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n} = \frac{-1}{2n(2n+1)} \sim -\frac{1}{4n^2}$. D'après la règle de comparaison des séries à termes positifs (en fait négatifs ici), $\sum u_n$ converge.

## Exercices d'approfondissement

### Exercice 4 (Convergence et calculs de sommes)

1. Série de terme général $u_n = \frac{2n^3+n^2-4n-2}{n!}$

   • (à titre d'entrainement, mais inutile puisque l'on arrive à montrer plus bas en effectuant le calcul que la suite des sommes partielles converge puisque l'on reconnaît ainsi une combinaison linéaire de séries exponentielles.)
   Comme $2n^3+n^2-4n-2 \to +\infty$, la série est à termes positifs pour $n$ assez grand.
   De plus, $u_n \sim \frac{2n^3}{n!}$
   Montrer que $\frac{2n^3}{n!}$ est le terme général (positif) d'une série convergente permettra alors d'appliquer le critère d'équivalence du TCSTP et d'en conclure que $\sum u_n$ converge.
   En effet, comme $2\frac{n^5}{n!} \underset{\text{c.c.}}{\longrightarrow} 0$, on a $\frac{2n^3}{n!} = \circ\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et puisque la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente (2>1), on en déduit par application du critère de négligeabilité du TCSTP que $\sum \frac{2n^3}{n!}$ cv, et par suite, que $\sum u_n$ cv
   • Calcul de la somme : En procédant par étapes, on montre que $2n^3+n^2-4n-2 = 2n(n-1)(n-2)+7n(n-1)-n-2$
   Donc, pour $N \geq 3$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} u_n &= 2\sum_{n=0}^{N} \frac{n(n-1)(n-2)}{n!} + 7\sum_{n=0}^{N} \frac{n(n-1)}{n!} - \sum_{n=0}^{N} \frac{n}{n!} - 2\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} && \text{(par linéarité de la somme)}\\
&= 2\sum_{n=3}^{N} \frac{n(n-1)(n-2)}{n!} + 7\sum_{n=2}^{N} \frac{n(n-1)}{n!} - \sum_{n=1}^{N} \frac{n}{n!} - 2\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} && \text{(le ou les premiers termes s'annulant)}\\
&= 2\sum_{n=3}^{N} \frac{1}{(n-3)!} + 7\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{(n-2)!} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n-1)!} - 2\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} && \text{(par simplification avec les factorielles)}\\
&= 2\sum_{i=0}^{N-3} \frac{1}{i!} + 7\sum_{j=0}^{N-2} \frac{1}{j!} - \sum_{l=0}^{N-1} \frac{1}{l!} - 2\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} && \text{(réindexation des sommes)}\\
&\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} + 7\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} - 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = 2e+7e-e-2e = 6e && \text{(c.l. de sommes partielles de séries exponentielles)}
\end{aligned}$$

La série de terme général $u_n$ converge donc vers $6e$.

**2.** Série de terme général $u_n = \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right), \quad n \geqslant 2$

- Étude de la convergence :

L'argument du logarithme est plus petit que 1 donc $u_n \le 0$. On sait que $u_n \sim -\frac{1}{n^2}$, et $\frac{1}{n^2}$ est le terme général d'une série convergente (Riemann avec $2>1$). La série de terme général $-\frac{1}{n^2}$ est donc convergente, mais à termes négatifs.
D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, appliqué aux séries de t.g. $-u_n$ et $\frac{1}{n^2}$, la série de terme général $-u_n$ converge, et $\sum u_n$ converge également.

- Calcul de la somme :

Pour tout $n \ge 2$, on a $u_n = \ln\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right) = \ln\left(\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}\right) = \ln(n-1)+\ln(n+1)-2\ln(n) = \big(\ln(n+1)-\ln(n)\big) - \big(\ln(n)-\ln(n-1)\big)$.
En posant $v_n = \ln(n)-\ln(n-1)$, on a donc $u_n = v_{n+1}-v_n$. On reconnait une somme télescopique :
$\sum_{k=2}^{n} u_n = \sum_{k=2}^{n} v_{n+1}-v_n = v_{n+1}-v_2 = \ln(n+1)-\ln(n)-\ln(2) = -\ln(2)+\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\ln 2$

**3.** Série de terme général $u_n = \frac{1+2+\cdots+n}{1+2^3+\cdots+n^3}$. On se souvient que la somme des $n$ premiers cubes est le carré de la somme des $n$ premiers entiers. On cherche ensuite $a$ et $b$ tels que $\frac{2}{n(n+1)} = \frac{a}{n}+\frac{b}{n+1}$. On conclut grâce à une série télescopique.

**4.** Série de terme général $u_n = \frac{x^{2n}}{(2n)!}$. Indice : on pense à étudier conjointement cette série et la série de terme général $v_n = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

## Exercice 5 (Très classique : autour de la série harmonique)

1. On reconnaît en $H_n$ une série de Riemann avec $\alpha = 1$, donc divergente. Comme il s'agit d'une série à termes positifs, elle tend vers $+\infty$.

2. a) L'application $f : t \longmapsto \frac{1}{t}$ est décroissante, donc pour $k-1 \leqslant t \leqslant k$, $f(k) \leqslant f(t) \leqslant f(k-1)$ ce qui, par intégration entre $k-1$ et $k$ donne l'inégalité voulue. En sommant la relation de 2 à $n$, on obtient $H_n - 1 \leqslant \ln(n) \leqslant H_{n-1}$. Comme $(H_n)$ est croissante, on a bien $H_n - 1 \leqslant \ln(n) \leqslant H_n$.

   b) L'inégalité précédente donne, en divisant par $H_n > 0$ qui tend vers $+\infty$, $1 - \frac{1}{H_n} \leqslant \frac{\ln n}{H_n} \leqslant 1$. Les termes aux deux extrémités tendent vers 1, donc par le théorème d'encadrement il en est de même de $\frac{\ln n}{H_n}$, et $H_n \sim \ln n$.

3. a) La série de terme général $v_n$ converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles converge, or $\sum_{k=0}^{n} v_k = u_n - u_0$, donc elle converge si et seulement si la suite $(u_n)$ converge.

   b) $v_n = H_n - H_{n-1} - \ln n + \ln(n-1) = \frac{1}{n} + \ln\left(1-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim -\frac{1}{2n^2}$. Donc $v_n$ est de signe constant à partir d'un certain rang, et équivalente au terme général d'une série de Riemann convergente. Donc $\sum v_n$ converge, et il en est de même de la suite $(u_n)$ par la question précédente. On note $\gamma$ la limite de $(u_n)$.

   c) D'après la question précédente, $H_n - \ln n \longrightarrow \gamma$.

## Exercice 6 (Très classique : Série harmonique alternée)

1. Calculer, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^1 (-t)^{k-1}\,\mathrm{d}t = -\left[\frac{(-t)^k}{k}\right]_0^1 = -\frac{(-1)^k - 0}{k} = \frac{(-1)^{k+1}}{k}$

   On a utilisé la formule de Leibniz-Newton, et la formule de la primitive de $u'u^\alpha$ : $\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ avec $\alpha = k-1$ et $u(t) = -t$ (et donc $u'(t) = -1$).

2. Pour tout $n \geq 1$, en sommant la relation obtenue pour $k$ entre 1 et $n$ :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} &= \sum_{k=1}^{n} \int_0^1 (-t)^{k-1}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \sum_{k=1}^{n} (-t)^{k-1}\,\mathrm{d}t && \text{par linéarité de l'intégrale} \\
&= \int_0^1 \sum_{i=0}^{n-1} (-t)^{i}\,\mathrm{d}t && \text{par changement d'indice } i = k-1 \\
&= \int_0^1 \frac{1-(-t)^n}{1+t}\,\mathrm{d}t && \text{somme des termes consécutifs de la suite géométrique de raison } -t \\
&= \int_0^1 \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t}\,\mathrm{d}t && \text{linéarité de l'intégrale} \\
&= [\ln(1+t)]_0^1 - \int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t}\,\mathrm{d}t && \text{car une primitive de } \frac{u'}{u} \text{ est } \ln(u) \text{ lorsque } u > 0 \\
&= \ln(2) - \int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

3. Pour $t \in ]0;1[$, $1+t > 1 > 0$ et donc $0 < \frac{1}{1+t} < 1$

   Par multiplication par $t^n > 0$, on obtient $0 < \frac{t^n}{1+t} < t^n$

   Par positivité de l'intégrale, on a $0 < \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t < \int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t$

   Or $\displaystyle\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$, d'où l'inégalité $0 \leq \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{n+1}$.

   Le théorème des gendarmes nous assure que $\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in ]0;1[$, on a $-\frac{t^n}{1+t} \leq \frac{(-t)^n}{1+t} \leq \frac{t^n}{1+t}$.

   Donc, par positivité de l'intégrale, $\displaystyle\int_0^1 -\frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t \leq \int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t}\,\mathrm{d}t \leq \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t$

   Par linéarité de l'intégrale, $\displaystyle -\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t \leq \int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t}\,\mathrm{d}t \leq \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t$

   Or les intégrales minorantes et majorantes tendent vers 0 quand $n \to +\infty$ d' après la question précédente, donc, par application du théorème des gendarmes, $\displaystyle\int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t}\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. En faisant tendre $n$ vers $+\infty$ dans l'égalité trouvée dans la question 2, on en déduit que la suite des sommes partielles $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ tend vers $\ln(2)$ et donc la série harmonique alternée $\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ converge et sa somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ vaut $\ln 2$.

## Exercice 7 (Très classique : Série harmonique alternée, autre démo)

Considérons $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} = \frac{(-1)^k}{k}$

1. La série de terme général $\frac{(-1)^n}{n}$ est-elle absolument convergente ?
2. Montrer que les suites extraites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
3. Que peut-on en déduire pour la série ?

On veut maintenant trouver la valeur de la somme.

4. On pose, pour tout entier $n \geq 1$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{(1+t)^{n+1}}\,\mathrm{d}t$
   - **a.** En intégrant par parties, montrer que, pour tout entier $n \geq 1$ $I_{n+1} = \frac{1}{n+1}$
   - **b.** Calculer $I_0$ et $I_1$
   - **c.** En déduire que, pour toute entier $n \geq 1$, $S_n = -\ln 2 + (-1)^n I_n$

**d.** Montrer que la suite $(I_n)$ converge et déterminer sa limite

**e.** En déduire la somme de la série de terme général $\frac{(-1)^n}{n}$

Remarque : on a utilisé dans les questions 2 et 3 une technique qui peut être mobilisée pour montrer que si $(a_n)$ est une suite décroissante et telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, alors la série de terme général $(-1)^n a_n$ converge. À savoir reproduire ! !

### Exercice 8

Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$.
2. Montrer que la suite $(u_n)$ est monotone et donner son sens de variation.
3. Montrer que la suite $(u_n)$ converge et déterminer sa limite.
4. On note $v_n = \ln(u_n)$ pour tout entier naturel $n$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum\limits_{k=0}^{n} u_k = v_0 - v_{n+1}$.
5. En déduire que la série $\sum u_n$ diverge.

## Un exercices tiré d'annales

### Exercice 9 (d'après EML 2002)

1. **Étude préliminaire**

**a.** $s_0(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \binom{n}{0} x^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n$ est la somme des termes d'une série géométrique de raison $x \in [0,1[$, donc $s_0(x) = \frac{1}{1-x}$. De même, $s_1(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \binom{n}{1} x^n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n x^n = x \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{x}{(1-x)^2}$ (somme des termes d'une série dérivée d'une série géométrique de raison $x \in [0,1[$).

**b.** Pour tout $(n,k)$ tel que $k < n$,

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{(k+1).n! + (n-k).n!}{(k+1)!(n-k)!}$$

$$= \frac{(n+1).n!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!} = \binom{n+1}{k+1}.$$

**c.** Comme les séries considérées ici convergent,

$$\begin{aligned}
x s_k(x) + x s_{k+1}(x) &= x \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n + x \sum_{n=k+1}^{+\infty} \binom{n}{k+1} x^n \\
&= x \binom{k}{k} x^k + x \sum_{n=k+1}^{+\infty} \left( \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} \right) x^n \\
&= x^{k+1} + x \sum_{n=k+1}^{+\infty} \binom{n+1}{k+1} x^n = x^{k+1} + \sum_{n=k+1}^{+\infty} \binom{n+1}{k+1} x^{n+1} \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n+1}{k+1} x^{n+1} = \sum_{j=k+1}^{+\infty} \binom{j}{k+1} x^j \qquad \text{en posant } j = n+1 \\
&= s_{k+1}(x).
\end{aligned}$$

**d.** D'après 1c, pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in [0,1[$, $(1-x) s_{k+1}(x) = x s_k(x)$, donc $s_{k+1}(x) = \frac{x}{1-x} s_k(x)$. On montre alors par une récurrence facile que

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1[, \quad s_k(x) = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}.}$$

**Rq :** il faut cependant bien penser à mettre dans l'hypothèse de récurrence "$\forall x \in [0,1[$."
On aurait aussi pu conclure en disant que, à $x \in [0,1[$ fixé, la suite $(s_k(x))$ est géométrique de raison $\frac{x}{1-x}$, ce qui conduit immédiatement au résultat souhaité, mais l'énoncé demande une récurrence...

2. **Étude d'une expérience aléatoire**

**a.** La probabilité d'obtenir la boule noire à chaque tirage est $1/5$, donc $\boxed{N \hookrightarrow \mathscr{G}(1/5).}$
Par suite, $N(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $N(k) = (1/5).(4/5)^{k-1}$.
De plus, $N$ admet une espérance et $\mathrm{E}(N) = \frac{1}{1/5} = 5$.

**b.** Soit $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Sachant $N = n$, on effectue $n$ tirages avec remise dans l'urne et on compte le nombre de boules noires obtenues, sachant que la probabilité d'obtenir une boule noire à chaque tirage est de $1/5$.

Donc, sachant $N = n$, $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n, 1/5)$.

Par suite, $\boxed{\mathrm{P}(X = k/N = n) = \begin{cases} 0 & \text{si } k > n \\ \binom{n}{k}(1/5)^k(4/5)^{n-k} & \text{si } 0 \leq k \leq n \end{cases}}$

**c.** D'après la formule des proba totales avec le système complet d'événements $(N = n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, on a :

$$\mathrm{P}(X = 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{P}(N = n)\mathrm{P}(X = 0/N = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} (1/5)(4/5)^{n-1}\binom{n}{0}(1/5)^0(4/5)^n$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} (1/5)(4/5)^{2n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} (1/5)(5/4)(4/5)^{2n} = \sum_{n=1}^{+\infty} (1/4)(16/25)^n = \frac{1}{4}\frac{16}{25}\frac{1}{1-16/25} \boxed{= \frac{4}{9}.}$$

**d.** Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

D'après la formule des proba totales avec le système complet d'événements $(N = n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X = k) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{P}(N = n)\mathrm{P}(X = k/N = n) \\
&= \sum_{n=1}^{k-1} \mathrm{P}(N = n)\mathrm{P}(X = k/N = n) + \sum_{n=k}^{+\infty} \mathrm{P}(N = n)\mathrm{P}(X = k/N = n) \\
&= \sum_{n=1}^{k-1} \mathrm{P}(N = n).0 + \sum_{n=k}^{+\infty} (1/5).(4/5)^{n-1}\binom{n}{k}(1/5)^k(4/5)^{n-k} \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k}(1/5)^{k+1}(4/5)^{2n-k-1} = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k}(1/5)^{k+1}(5/4)^{k+1}(4/5)^{2n} \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k}(1/4)^{k+1}(16/25)^n = (1/4)^{k+1}\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k}(16/25)^n = (1/4)^{k+1}s_k(16/25) \\
&= (1/4)^{k+1}.\frac{(16/25)^k}{(1-16/25)^{k+1}} = \frac{1}{4}\frac{(1/4)^k(16/25)^k}{(9/25)(9/25)^k} \boxed{= \frac{25}{36}\left(\frac{4}{9}\right)^k.}
\end{aligned}$$

**e.** Sous réserve de convergence,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} k\mathrm{P}(X = k) = 0 + \sum_{k=1}^{+\infty} k\mathrm{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\frac{25}{36}\left(\frac{4}{9}\right)^k = \frac{25}{36}\frac{4}{9}\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{4}{9}\right)^{k-1}.$$

Or, cette dernière série converge comme série dérivée d'une série géométrique de raison $4/9 \in ]-1, 1[$, donc la série de départ converge, et, comme elle est à termes positifs, elle converge absolument.

Par suite, $X$ admet une espérance et

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} k\mathrm{P}(X = k) = \frac{25}{81}\frac{1}{(1-4/9)^2} \boxed{= 1.}$$

**f.** Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X \leq k) &= \sum_{n=0}^{k} \mathrm{P}(X = n) = \mathrm{P}(X = 0) + \sum_{n=1}^{k} \mathrm{P}(X = n) \\
&= \frac{4}{9} + \sum_{n=1}^{k} \frac{25}{36}\left(\frac{4}{9}\right)^n = \frac{4}{9} + \frac{25}{81}\frac{1-\left(\frac{4}{9}\right)^k}{1-4/9} = \frac{4}{9} + \frac{5}{9}\left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^k\right) \\
&\boxed{= 1 - \frac{5}{9}\left(\frac{4}{9}\right)^k.}
\end{aligned}$$