Couples de variables aléatoires - suite

Exercices d'application directe du cours

Exercice 1 (Loi de max)

Soit X et Y deux var indépendantes, suivant toutes deux la loi géométrique de paramètre p, où p est un élément de $]0;1[$.
Déterminer la loi de $S = \max(X, Y)$

Exercice 2 (Loi de min et de max)

Soit X une var définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$, suivant suivant la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$, où n est un entier naturel **pair**.
On note $Y = n+1-X$ et on pose $I = \min(X, Y)$ et $S = \max(X, Y)$.

1. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, montrer que $(S \leq k) = (n+1-k \leq X \leq k)$
2. En déduire que le support de $S(\Omega) = [\![\frac{n}{2}+1; n]\!]$.
3. Conclure que S suit la loi uniforme sur $[\![\frac{n}{2}+1; n]\!]$.
4. Procéder de même pour trouver la loi de I.

Exercice 3 (Des calculs basiques à savoir faire)

Soit X une var de loi :

x_i	-2	-1	0	1	2
$\mathrm{P}(X = x_i)$	$1/6$	$1/4$	$1/6$	$1/4$	$1/6$

et $Y = X^2$

1. Donner la loi du couple (X, Y)
2. Donner la loi marginale de Y.
3. X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Déterminer la covariance de X et Y, puis le coefficient de corrélation linéaire de (X, Y).

Exercice 4 (Covariance et coefficient de corrélation linéaire)

Calculer la covariance et le coefficient de corrélation linéaire de X et Y.

Exercice 5 (d'après ESSEC)

Soient X et Y deux var définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$, admettant un moment d'ordre 2. Déterminer $\mathrm{Cov}(X+Y, X-Y)$

Exercices d'entraînement

Exercice 6

On considère n boîtes numérotées de 1 à n. La boîte numéro k contient k boules numérotées de 1 à k. On choisit au hasard une boîte, puis une boule dans cette boîte. Soient X et Y les numéros de la boîte et de la boule obtenues.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y).
2. Calculer $\mathrm{P}(X = Y)$.
3. Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance.
4. Déterminer la covariance de X et Y.

Exercice 7

Un bouquet de feu d'artifice explose en créant N noyaux lumineux. À son tour, chaque noyau explose avec une probabilité p puis s'éteint. On suppose que N suit la loi de Poisson de paramètre λ. On note X le nombre de noyaux qui explosent et Y ne nombre de noyaux qui n'explosent pas.

1. **a.** Pour tout couple (i, j) d'entiers naturels, calculer, en distinguant les cas $i \leq j$ et $i > j$, $\mathrm{P}_{(N=j)}(X = i)$.
   b. En déduire la loi du couple (N, X).
   c. Déterminer la loi de probabilité de X, son espérance et sa variance.
2. Expliquer sans calcul pourquoi Y suit la loi de Poisson de paramètre λq où $q = 1-p$
3. Montrer que X et Y sont indépendantes. (ce qui est complètement contre-intuitif, n'est ce pas ?)
4. **a.** Exprimer la variance de Y en fonction de celles de N et de X.
   b. En déduire $\mathrm{Cov}(N, X)$ et $\mathrm{Cov}(N, Y)$.
5. Sachant que k noyaux ont explosé, déterminer la loi du nombre de noyaux créés par l'explosion et son espérance.

Exercice 8 (une démonstration de cours)

Soient X et Y deux variables aléatoires admettant des moments d'ordre 2. Montrer le résultat de cours suivant : $\sigma(X+Y) \leq \sigma(X)+\sigma(Y)$

Exercice 9

Soit $n \geq 2$. Au cours d'une journée, n personnes se rendent dans un marché, constitué de trois primeurs. On suppose que chaque personne choisit au hasard l'un des trois primeurs et que les différents choix sont mutuellement indépendants. Pour tout $i \in \{1,2,3\}$, on note X_i la var égale au nombre de personnes ayant choisi le primeur numéro i.

1. Déterminer la loi de X_1 et préciser son espérance et sa variance.
2. Déterminer la loi de X_1+X_2 et préciser sa variance.
3. En déduire la valeur de $\mathrm{Cov}(X_1,X_2)$.

Exercice tiré d'annales

Exercice 10 (D'après EDHEC 2011)

Un groupe de n clients se rend dans une boutique de cet opérateur et chacun achète un forfait parmi plusieurs disponibles (le nombre n'importe pas). On considère la var X_1 correspondant au nombre de clients parmi ces n clients ayant choisi le forfait 1, et la var X_2 correspondant au nombre de clients parmi ces n clients ayant choisi le forfait 2. On considère que la probabilité qu'un client choisisse le forfait 1 est p_1 et la probabilité qu'un client choisisse le forfait 2 est p_2.

1. Justifier sans calcul la loi suivie par X_1 et X_2.
2. Déterminer la loi suivie par X_1+X_2.
3. En déduire $\mathrm{Cov}(X_1,X_2)$.