Couples de variables aléatoires - suite - Élements de correction

Exercices d'application directe du cours

Exercice 1 (Loi de max)

Soit X et Y deux var indépendantes, suivant toutes deux la loi géométrique de paramètre p, où p est un élément de $]0;1[$.
X et Y prennent toutes leurs valeurs dans $\mathbb{N}^*$, donc S prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et on a :
$\forall k \in N^*$, dire que la plus grande des deux valeurs X et Y est inférieure ou égale à k, c'est dire que les deux valeurs X et Y sont simultanément inférieures ou égales à k.
D'où pour tout k dans $\mathbb{N}^*$ $\quad (S \leq k) = (X \leq k) \cap (Y \leq k)$.
Puisque X et Y sont indépendantes : $\quad \mathrm{P}(S \leq k) = \mathrm{P}(X \leq k)\mathrm{P}(Y \leq k)$.
Puisque X suit la loi géométrique de paramètre p, pour tout $k \geq 1$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X \leq k) &= \sum_{i=1}^{k} \mathrm{P}(X = i) \\
&= \sum_{i=1}^{k} (1-p)^{i-1} p \\
&= p\frac{1-(1-p)^k}{1-(1-p)} && \text{en reconnaissant une somme de termes consécutifs d'une suite géométrique} \\
&= 1-(1-p)^k
\end{aligned}$$

Puisque Y suit la même loi que X, on a également $\mathrm{P}(Y \leq k) = 1-(1-p)^k$

D'où $\quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{P}(S \leq k) = \left(1-(1-p)^k\right)^2$

En substituant $k-1$ à k, et en remarquant que le résultat est toujours vrai si $k-1=0$ $\left(\text{car } P(S \leq 0) = 0\right)$, on a donc :
donc $\mathrm{P}(S = k) = \mathrm{P}(S \leq k) - \mathrm{P}(S \leq k-1) = \left(1-(1-p)^k\right)^2 - \left(1-(1-p)^{k-1}\right)^2 = \left((1-p)^{k-1} - (1-p)^k\right)\left(2-(1-p)^k-(1-p)^{k-1}\right)$

En conclusion, Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\quad \mathrm{P}(S = k) = p(1-p)^{k-1}\left(2-(1-p)^{k-1}(2-p)\right)$

Exercice 2 (Loi de min et de max)

Réponses brutes :
$S(\Omega) = [\![\frac{n+2}{2}, n]\!]$ et $S \hookrightarrow \mathscr{U}\left([\![\frac{n+2}{2}, n]\!]\right)$
$I(\Omega) = [\![1; \frac{n}{2}]\!]$ et $S \hookrightarrow \mathscr{U}\left([\![1; \frac{n}{2}]\!]\right)$

Exercice 3 (Des calculs basiques à savoir faire)

Soit X une var de loi :

x_i	-2	-1	0	1	2
$\mathrm{P}(X = x_i)$	$1/6$	$1/4$	$1/6$	$1/4$	$1/6$

et $\quad Y = X^2$

1. Le couple (X, Y) a sa loi donnée par :

$X \backslash Y$	0	1	4
-2	0	0	$1/6$
-1	0	$1/4$	0
0	$1/6$	0	0
1	0	$1/4$	0
2	0	0	$1/6$

2. Par sommation par colonnes, on obtient la loi de Y :

y_j	0	1	4
$\mathrm{P}(Y = y_j)$	$1/6$	$1/2$	$1/3$

3. Les variables X et Y ne sont pas indépendantes. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer $\mathrm{P}(X = -2)\mathrm{P}(Y = 0) = 1/36$ alors que $\mathrm{P}(X = -2, Y = 0) = 0$

4. Par le théorème de transfert, on trouve $\mathrm{E}(XY) = \sum_{i\in X(\Omega)}\sum_{k\in Y(\Omega)} i\times k\times \mathrm{P}(X=i, Y=k) = -8\times\frac{1}{6} - 1\times\frac{1}{4} + 0 + 1\times\frac{1}{4} + 8\times\frac{1}{6} = 0$
Ainsi, $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y) = 0$ car un calcul simple donne $\mathrm{E}(X) = 0$.
Ainsi la covariance de X et Y est nulle, ainsi que le coefficient de corrélation linéaire, mais pourtant X et Y ne sont pas indépendantes.

Exercice 4 (Covariance et coefficient de corrélation linéaire)

• Calcul de la covariance :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X,Y) &= \mathrm{Cov}(X, n+1-X) \\
&= \mathrm{Cov}(X, n+1) - \mathrm{Cov}(X,X) && \text{par linéarité à droite de la covariance} \\
&= 0 - \mathrm{V}(X) && \text{car } n+1 \text{ est constante} \\
&= -\frac{n^2-1}{12} && \text{car } X \text{ suit la loi uniforme sur } [\![1,n]\!]
\end{aligned}$$

• Concernant le coefficient de corrélation linéaire, la relation $Y = n+1-X$ nous assure que X et Y sont linéairement corrélées, et comme le coefficient directeur de la relation liant Y à X est négatif, il vient $\rho(X,Y) = -1$

Exercice 5 (d'après ESSEC)

Soient X et Y deux var définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$, admettant un moment d'ordre 2.
$\mathrm{Cov}(X+Y, X-Y) = \mathrm{Cov}(X,X) - \mathrm{Cov}(X,Y) + \mathrm{Cov}(Y,X) - \mathrm{Cov}(Y,Y)$ par bilinéarité de la covariance
$\mathrm{Cov}(X+Y, X-Y) = \mathrm{V}(X) - \mathrm{Cov}(X,Y) + \mathrm{Cov}(X,Y) - \mathrm{V}(Y)$ par symétrie de la covariance
$\mathrm{Cov}(X+Y, X-Y) = \mathrm{V}(X) - \mathrm{V}(Y)$

Exercices d'entraînement

Exercice 6

On considère n boîtes numérotées de 1 à n. La boîte numéro k contient k boules numérotées de 1 à k. On choisit au hasard une boîte, puis une boule dans cette boîte. Soient X et Y les numéros de la boîte et de la boule obtenues.

1. $X(\Omega) = Y(\Omega) = [\![1,n]\!]$ et X suit la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$ d'où $P(X=i) = \frac{1}{n}$ pour tout i compris entre 1 et n.
$(X=i)$ étant de probabilité non nulle, il vient :
$\mathrm{P}\big((X=i)\cap(Y=j)\big) = \mathrm{P}_{(X=i)}(Y=j)\mathrm{P}(X=i) = \frac{1}{i}\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{ni}$ pour $j \le i$
puisque l'urne i ne contenant que des boules numérotées de 1 à i, la probabilité de tirer chaque boule est de $\frac{1}{i}$.
Pour $j > i$, $\mathrm{P}(\big((X=i)\cap(Y=j)\big) = 0$
2. L'événement $(X=Y)$ est la réunion disjointe des événements $\big((X=1)\cap(Y=1)\big)$, ... ,$\big((X=n)\cap(Y=n)\big)$.
On peut donc calculer $\mathrm{P}(X=Y)$ en additionnant les probabilités ci-dessus : $\mathrm{P}(X=Y) = \sum_{k=1}^{n}\mathrm{P}\big((X=k)\cap(Y=k)\big) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{kn} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.
3. • La formule des probabilités totales, associée au système complet d'événements $(X=i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ donne :
$\mathrm{P}(Y=j) = \sum_{i=1}^{n}\mathrm{P}\big((X=i)\cap(Y=j)\big) = \sum_{i=j}^{n}\frac{1}{ni} = \frac{1}{n}\sum_{i=j}^{n}\frac{1}{i}$ (puisque les $j-1$ premiers termes de la somme sont nuls.)
• La variable aléatoire Y admet un support fini, donc elle possède une espérance, un moment d'ordre deux et une variance.
$\mathrm{E}(Y) = \sum_{j=1}^{n} j\mathrm{P}(Y=j) = \sum_{j=1}^{n} j\times\frac{1}{n}\sum_{i=j}^{n}\frac{1}{i} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\frac{j}{i} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\sum_{j=1}^{i} j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\frac{i(i+1)}{2} = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} i+1 = \frac{1}{2n}\big(\frac{n(n+1)}{2}+n\big) = \frac{n+3}{4}$
• Pour la variance, on commence par calculer le moment d'ordre 2 (même méthode que plus haut pour l'interversion des deux sommes, et on aura en plus besoin dans le calcul de se souvenir de la somme des premiers carrés $\sum_{k=1}^{n}k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$).
On trouve $\mathrm{E}(Y^2) = \sum_{j=1}^{n} j^2\mathrm{P}(Y=j) = \ldots = \frac{4n^2+15n+17}{36}$
Puis en utilisant la formule de Koenig-Huygens, $V(Y) = \mathrm{E}\big(Y^2\big) - \big(E(Y)\big)^2 = \frac{4n^2+15n+17}{36} - \big(\frac{n+3}{4}\big)^2 = \frac{7n^2+6n-13}{144}$

4. La convergence de XY existe puisque c'est une variable aléatoires finie, et d'après le théorème de transfert :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(XY) &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} ki\mathrm{P}\big((X=k)\cap(Y=i)\big)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n}\\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k} i && \text{les autres termes de la somme étant nuls d'après la question 1.}\\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k(k+1)}{2}\\
&= \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k\\
&= \frac{1}{2n}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\right]\\
&= \frac{(n+1)(n+2)}{6}-\frac{(n+1)(n+3)}{8}
\end{aligned}$$

D'où $\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{E}(XY)-\mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)=\dfrac{(n+1)(n+2)}{6}$ car X suit la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$ et $\mathrm{E}(Y)=\dfrac{n+3}{4}$ d'après l'ex 4

Finalement, $\mathrm{Cov}(X,Y)=\dfrac{n^2-1}{24}$

Exercice 7

Exercice archi classique.

1. **a.** $N(\Omega)=\mathbb{N}$ et $X(\Omega)=\mathbb{N}$.

• Mais si $i>j$, $P_{(N=j)}(X=i)=0$, car si $(N=j)$ est réalisé, il y a j noyaux lumineux. Il y en a donc forcément au maximum j qui explosent.

• Si $j\geq i$, lorsque $(N=j)$ est réalisé il y a j noyaux qui explosent indépendamment les uns des autres, chacun avec probabilité p. Le nombre de noyaux qui explosent (conditionnellement à $(N=j)$) suit alors la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$. Autrement dit, $\mathrm{P}_{(N=j)}(X=i)=\binom{j}{i}p^i(1-p)^{j-i}$.

b. On en déduit que la loi de (N,X) est donnée par

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(N=j,X=i) &= \mathrm{P}\big((N=j)\cap(X=i)\big) && \text{si } j\geq i\\
&= \mathrm{P}(N=j)\mathrm{P}_{(N=j)}(X=i) && \text{si } j\geq i\\
&= e^{-\lambda}\frac{\lambda^j}{j!}\binom{j}{i}p^i(1-p)^{j-i} && \text{si } j\geq i\\
&= 0 && \text{sinon, si } j<i
\end{aligned}$$

Mais puisque pour $j<i$, $binomji=0$, la formule trouvée ci dessus fonctionne pour tout $(i,j)\in\mathbb{N}^2$.

c. pour tout $i\in\mathbb{N}$, on applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $\big((Y=j)\big)_{j\in\mathbb{N}}$:
Sous réserve de convergence, et compte tenu de la question précédente,

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X=i) &= \sum_{j=0}^{+\infty}\mathrm{P}\big((N=j)\cap(X=i)\big)\\
&= \sum_{j=i}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^j}{j!}\binom{j}{i}p^i(1-p)^{j-i} && \text{or } \frac{\binom{i}{j}}{j!}=\frac{1}{i!(j-i)!}\\
&= \frac{e^{-\lambda}p^i}{i!}\sum_{j=i}^{+\infty}\frac{(1-p)^{j-i}}{(j-i)!}\lambda^j && \text{en écrivant } \lambda^j=\lambda^i\lambda^{j-i}\\
&= \frac{e^{-\lambda}p^i\lambda^i}{i!}\sum_{j=i}^{+\infty}\frac{(1-p)^{j-i}\lambda^{j-i}}{(j-i)!} && \text{en posant } k=j-i \text{ et donc } j=k+i\\
&= \frac{e^{-\lambda}(p\lambda)^i}{i!}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{((1-p)\lambda)^k}{k!} && \text{et en reconnaissant une série exponentielle :}\\
&= \frac{e^{-\lambda}(p\lambda)^i}{i!}e^{(1-p)\lambda}
\end{aligned}$$

Pour finir, pour tout entier naturel i, $\mathrm{P}(X=i)=\dfrac{e^{-p\lambda(p\lambda)^i}}{i!}$
Donc X suit la loi de Poisson de paramète $p\lambda$. Son espérance est $p\lambda$ et sa variance $p\lambda$.

2. Si on compte le nombre de noyaux qui n'explosent pas et non pas le nombre de noyaux qui explosent, on peut reproduire le raisonnement précédent en échangeant p et $1-p$. Donc Y suit la loi de Poisson de paramètre $q\lambda$ où $q=1-p$.

3. Soient i et j deux entiers naturels. Compte-tenu des questions précédentes :

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X=i)\mathrm{P}(Y=j) &= \frac{e^{-p\lambda}(p\lambda)^i}{i!}\frac{e^{-q\lambda}(q\lambda)^j}{j!}\\ &= \frac{e^{-\lambda p-\lambda q}\lambda^{i+j}p^iq^j}{i!j!}\\ &= \frac{e^{-\lambda}\lambda^{i+j}p^iq^j}{i!j!} && \text{car } p+q=1\end{aligned}$$

D'autre part, le calcul de la question 1b montre, comme $X+Y=N$, que :
$\mathrm{P}(X=i,Y=j)=\mathrm{P}(X=i,N-X=j)=\mathrm{P}(X=i;N=i+j)=\binom{i+j}{i}p^iq^{i+j-i}\frac{e^{-\lambda}\lambda^{i+j}}{(i+j)!}=\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{i+j}p^iq^j}{i!j!}$
Finalement, pour tout $(i,j)\in\mathbb{N}^2$, $\mathrm{P}\big((X=i)\cap(Y=j)\big)\mathrm{P}(X=i)\mathrm{P}(Y=j)$, ce qui signifie que X et Y sont indépendantes.

4. **a.** Comme $Y=N-X$, $\mathrm{V}(Y)=\mathrm{V}(N)-2\mathrm{Cov}(N,X)+\mathrm{V}(X)$ d'après la formule de polarisation.

b. Ainsi, $\mathrm{Cov}(N,X)=\frac{1}{2}\big(\mathrm{V}(N)+\mathrm{V}(X)-\mathrm{V}(X)\big)=\frac{1}{2}(\lambda+p\lambda-q\lambda)=\lambda$ puisque $p+q=1$
De même, $\mathrm{Cov}(N,Y)=\lambda$

5. Si k noyaux ont explosé, nécessairement il y en a eu plus de k créés. De plus, pour $i\geq k$, on cherche $\mathrm{P}_{(X=k)}(N=i)$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}_{(X=k)}(N=i) &= \frac{\mathrm{P}(X=k,N=i)}{\mathrm{P}(X=k)}\\ &= \frac{\mathrm{P}(X=k,Y=i-k)}{\mathrm{P}(X=k)}\\ &= \frac{\mathrm{P}(X=k)\mathrm{P}(Y=i-k)}{\mathrm{P}(X=k)} && \text{par indépendance de } X \text{ et } Y\\ &= \mathrm{P}(Y=i-k)\\ &= \frac{e^{-q\lambda}(q\lambda)^{i-k}}{(i-k)!}\end{aligned}$$

Cela se traduit par le fait que, conditionnellement à $(X=k)$, la variable $N-k$ suit la loi de Poisson de paramètre $q\lambda$ (en effet, i étant plus grand que k, on peut poser $j=i-k$, c'est à dire $i=j+k$ et $\mathrm{P}_{(X=k)}(N-k=j)=\mathrm{P}_{(X=k)}(N=i)=\mathrm{P}_{(X=k)}(N=j+k)=\dfrac{e^{-q\lambda}(q\lambda)^j}{j!}$)
On en déduit que $\mathrm{E}_{(X=k)}(N-k)=q\lambda$, et donc $\mathrm{E}_{(X=k)}(N)=q\lambda+k$

Exercice 8

$\mathrm{V}(X+Y)=\mathrm{V}(X)+\mathrm{V}(Y)+2\mathrm{Cov}(X,Y)$ Or $\mathrm{Cov}(X,Y)\leq|\mathrm{Cov}(X,Y)|\leq\sigma(X)\sigma(Y)$ donc
$\mathrm{V}(X+Y)\leq\mathrm{V}(X)+\mathrm{V}(Y)+2\sigma(X)\sigma(Y)$
C'est à dire $\mathrm{V}(X+Y)\leq(\sigma(X)+\sigma(Y))^2$ puisque $\sigma(X)^2=\mathrm{V}(X)$ et $\sigma(Y)^2=\mathrm{V}(Y)$
Puisque $\sigma(X)+\sigma(Y)\geq 0$ et $\sigma(X+Y)\geq 0$, on en déduit le résultat, par croissance de la racine carrée.

Exercice 9

C'est quasiment le même exercice que l'ex 10, les résultats sont donc indiqués de manière brute. Pour la rédaction, se référer à l'ex 15

1. $X_1\hookrightarrow\mathscr{B}\big(n,\frac{1}{3}\big)$, $\mathrm{E}(X_1)=\frac{n}{3}$ et $\mathrm{V}(X_1)=\frac{2n}{9}$
2. $X_1+X_2\hookrightarrow\mathscr{B}\big(n,\frac{2}{3}\big)$, $\mathrm{V}(X_1+X_2)=\frac{2n}{9}$
3. $\mathrm{Cov}(X_1,X_2)=-\frac{n}{9}$.

Exercice tiré d'annales

Exercice 10 (d'après EDHEC 2011)

Un groupe de n clients se rend dans une boutique de cet opérateur et chacun achète un forfait parmi plusieurs disponibles (le nombre n'importe pas). On considère la var X_1 correspondant au nombre de clients parmi ces n clients ayant choisi le forfait 1, et la var X_2 correspondant au nombre de clients parmi ces n clients ayant choisi le forfait 2. On considère que la probabilité qu'un client choisisse le forfait 1 est p_1 et la probabilité qu'un client choisisse le forfait 2 est p_2.

1. X_1 et X_2 comptent le nombre de succès parmi n répétitions d'une expérience de Bernoulli indépendantes (respectivement choisir le forfait 1 et choisir le forfait 2). Ainsi $X_1 \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p_1)$ et $X_2 \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p_2)$.
2. $X_1 + X_2$ compte le nombre de succès parmi n répétitions de lois de Bernoulli indépendantes (le succès étant choisir le forfait 1 ou le forfait 2, de probabilité $p_1 + p_2$)
   Attention, il ne s'agit pas ici de la loi de stabilité par somme de deux var indépendantes suivantes des lois de binomiales de même paramètre p ! Veuillez à bien vous assurer d'avoir saisi la différence !
3. X_1 et X_2 admettant une variance, $\text{Cov}(X_1, X_2)$ existe bien et d'après la formule de polarisation : $\mathsf{V}(X_1 + X_2) = \mathsf{V}(X_1) + \mathsf{V}(X_2) + 2\text{Cov}(X_1, X_2)$
   d'où $\quad \text{Cov}(X_1, X_2) = \frac{1}{2}\big(\mathsf{V}(X_1 + X_2) - \mathsf{V}(X_1) - \mathsf{V}(X_2)\big)$
   Or $\begin{cases} \mathsf{V}(X_1 + X_2) = n(p_1 + p_2)\big(1 - (p_1 + p_2)\big) \\ \mathsf{V}(X_1) = np_1(1 - p_1) \\ \mathsf{V}(X_2) = np_2(1 - p_2) \end{cases}$
   En remplaçant, après calculs, $\text{Cov}(X_1, X_2) = -np_1p_2$