

Graphes - Rappels - Corrigé

Exercice 1

Associons le problème à un graphe dont chaque sommet représente une de ces personnes, les sommets étant adjacents lorsque les personnes qu'ils représentent se connaissent. Le problème posé revient donc à chercher s'il existe des graphes dont les sommets ont des degrés tous différents. Supposons que ce soit le cas. Remarquons que le graphe est un graphe non orienté simple et qu'il ne comporte pas de boucle. Les degrés des sommets d'un graphe d'ordre n sont donc à choisir dans l'ensemble $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Pour que les n sommets aient des degrés tous différents, chaque sommet a pour degré un nombre différent compris entre 0 et $n-1$ (ce qui est a priori possible puisqu'il y a n sommets et n nombres entiers entre 0 et $n-1$). En particulier, un sommet doit être de degré 0 et un autre de degré $n-1$. Ce qui est impossible : si un individu ne connaît personne, il ne peut y en avoir un qui connaît tout le monde (les relations de connaissances étant réciproque puisque le graphe est non orienté). Donc dans un graphe de n personnes, il y en a effectivement toujours au moins deux qui ont le même nombre de connaissances.

Exercice 2

En associant le problème à un graphe dont chaque sommet est un joueur et deux sommets sont adjacents lorsqu'une partie est jouée entre deux joueurs, cela reviendrait à considérer un graphe d'ordre 15 dans lequel chaque sommet est de degré 5. La somme des degrés de tous les sommets du graphe sera égale à 75, ce qui est en contradiction avec la formule d'Euler qui dit qu'elle doit être paire. Il est donc impossible d'organiser une telle rencontre.

Exercice 3

Il s'agit d'un problème de recherche de chaînes eulériennes et de cycles eulériens, qui se résout facilement avec le théorème d'Euler.

Exercice 4

Pour la correction aller voir la [vidéo explicative](#).

A	B	C	D	E	F	choix	coeff
0	∞	∞	∞	∞	∞	A	0
$\diagdown$	7(A)	∞	15(A)	∞	∞	B	7
$\diagdown$	$\diagdown$	19(B)	15(A)	11(B)	23(B)	E	11
$\diagdown$	$\diagdown$	19(B)	13(E)	$\diagdown$	23(B)	D	13
$\diagdown$	$\diagdown$	18(D)	$\diagdown$	$\diagdown$	23(B)	C	18
$\diagdown$	$\diagdown$	$\diagdown$	$\diagdown$	$\diagdown$	21(C)	F	21

Le trajet le plus court entre A et F est 21 :

$$A - \frac{B}{4} - \frac{E}{2} - \frac{D}{5} - \frac{C}{3} - F.$$

Exercice 5

On applique l'algorithme de Dijkstra. Voici le tableau correspondant aux différentes étapes :

E	A	B	C	D	G	F	S	choix	coeff
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	E	0
$\diagdown$	5(E)	3(E)	2(E)	∞	∞	∞	∞	C	2
$\diagdown$	5(E)	3(E)	$\diagdown$	∞	4(C)	4(C)	∞	B	3
$\diagdown$	4(B)	$\diagdown$	$\diagdown$	∞	4(C)	4(C)	∞	A	4
$\diagdown$	$\diagdown$	$\diagdown$	$\diagdown$	6(A)	4(C)	4(C)	∞	G	4
$\diagdown$	$\diagdown$	$\diagdown$	$\diagdown$	6(A)	$\diagdown$	4(C)	∞	F	4
$\diagdown$	$\diagdown$	$\diagdown$	$\diagdown$	5(F)	$\diagdown$	$\diagdown$	10(F)	D	5
$\diagdown$	$\diagdown$	$\diagdown$	$\diagdown$	$\diagdown$	$\diagdown$	$\diagdown$	10(F)	S	10

En parcourant le tableau de bas en haut (en rouge), on trouve le trajet le plus court entre E et S : il s'agit d'une chaîne de poids 10 :

$$E - \frac{C}{2} - \frac{F}{2} - \frac{S}{6}.$$