Equations différentielles - Rappels de première année

Exercice 1

Résoudre les équations différentielles linéaires homogènes d'ordre 1 à coefficients constants suivantes.

1. $y' = 2y$
2. $y' - 3y = 0$
3. $y' + 4y = 0$

Exercice 2

Résoudre les problèmes de Cauchy suivants.

1. $\begin{cases} y' + 10y = 0 \\ y(0) = 10 \end{cases}$
2. $\begin{cases} y' - 7y = 0 \\ y(0) = -3 \end{cases}$
3. $\begin{cases} y' = 8y \\ y(0) = -1 \end{cases}$

Exercice 3

Déterminer l'ensemble des solutions des équations différentielles suivantes :

1. $y' + 2y = 3$
2. $y' - y = t^2 + 1$
3. $y' + y = te^t$

On cherchera dans chaque cas une solution particulière sous la forme :

pas besoin d'indication $\qquad y_p(t) = at^2 + bt + c \qquad y_p(t) = (at + b)e^t$

Exercice 4

Déterminer l'ensemble des solutions des équations différentielles suivantes :

1. $y'' - 3y' + 2y = 0$
2. $y'' - 4y' + 4y = 0$
3. $y'' - 2y = 0$

Exercice 5

Résoudre les problèmes de Cauchy suivants.

1. $\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$
2. $\begin{cases} y'' - 4y' + 4y = 0 \\ y(0) = -3 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$
3. $\begin{cases} y'' - 2y = 0 \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$

Exercice 6

Déterminer l'ensemble des solutions des équations différentielles suivantes : (dans chaque cas, on donne une indication sur la forme de la solution particulière y_p)

1. $y'' - 3y' + 2y = 1 + t$
   avec $y_p(t) = at + b$
2. $y'' - 3y' + 2y = te^t$
   avec $y_p(t) = (at^2 + bt)e^t$
3. $y'' - 4y' + 4y = te^{2t}$
   avec $y_p(t) = (at^3 + bt^2)e^{2t}$
4. $y'' - 4y' + 4y = (-1 + t)e^{-t}$
   avec $y_p(t) = (at + b)e^{-t}$
5. $y'' - 2y = e^t$
   avec $y_p(t) = ae^t$
6. $y'' - 2y = 1 - 2t + 3t^2$
   avec $y_p(t) = at^2 + bt + c$

Exercice 7

Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y'' - y' = 0$ de deux manières différentes :

1. En appliquant le théorème du cours sur les équations différentielles linéaires d'ordre 2.
2. En faisant un changement de fonction inconnue pour se ramener à une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

Exercice 8

Soit $(a, b) \in]0, +\infty[^2$. On considère l'équation différentielle logistique (non linéaire)

$$y' = ay - aby^2 \tag{E}$$

1. Déterminer les équilibres de l'équation logistique.
2. Soit f une solution de (E) sur $[0, +\infty[$ qui ne s'annule pas (on admet qu'une telle solution existe).
   a. On pose $z = \dfrac{1}{f}$. Montrer que z satisfait une équation différentielle linéaire puis montrer que, pour tout $t \geq 0$, $\quad z(t) = b + (z(0) - b)e^{-at}$.
   b. En déduire que, pour tout $t \geq 0$, $f(t) = \dfrac{f(0)}{bf(0) + (1 - bf(0))e^{-at}}$.
3. Calculer $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t)$. Que remarque-t-on ?