Equations différentielles - Rappels de première année
Éléments de correction

Exercice 1

1. $y' = 2y$
   Les solutions sont les fonction définies sur $\mathbb{R}$ de la forme $t \mapsto \lambda e^{2t}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. $y' - 3y = 0$
   Les solutions sont les fonction définies sur $\mathbb{R}$ de la forme $t \mapsto \lambda e^{3t}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$
3. $y' + 4y = 0$
   Les solutions sont les fonction définies sur $\mathbb{R}$ de la forme $t \mapsto \lambda e^{-4t}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$

Exercice 2

Résoudre les problèmes de Cauchy suivants.

1. $\begin{cases} y' + 10y = 0 \\ y(0) = 10 \end{cases}$
   Les solutions de $y' + 10y = 0$ sont les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ du type $y(t) = \lambda e^{-10t}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$
   Or $y(0) = 10$ c'est à dire que $10 = \lambda e^0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 10$.
   Finalement l'unique solution au problème de Cauchy $\begin{cases} y' + 10y = 0 \\ y(0) = 10 \end{cases}$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $y(t) = 10e^{-10t}$

2. L'unique solution au problème de Cauchy $\begin{cases} y' - 7y = 0 \\ y(0) = -3 \end{cases}$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $y(t) = -3e^{7t}$.

3. L'unique solution au problème de Cauchy $\begin{cases} y' = 8y \\ y(0) = -1 \end{cases}$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $y(t) = -e^{8t}$.

Exercice 3

1. $y' + 2y = 3$
   - Les solutions de l'équation homogène associée $y' + 2y = 0$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme $t \mapsto \lambda e^{-2t}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
   - Or la fonction constante $y_P(t) = \frac{3}{2}$ est une solution particulière de $y' + 2y = 3$.
   - Donc les solutions de $y' + 2y = 3$ sont les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par $y(t) = \lambda e^{-2t} + \frac{3}{2}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

2. $y' - y = t^2 + 1$
   - Les solutions de l'équation homogène associée $y' - y = 0$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme $t \mapsto \lambda e^{t}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
   - On cherche une fonction particulière polynômiale du type $y_p(t) = at^2 + bt + c$.
   y_P est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ puisque c'est un polynôme et pout tout t réel, $y_p'(t) = 2at + b$.
   y_P est solution de $y' - y = t^2 + 1$ si et seulement si $(2at + b) - (at^2 + bt + c) = t^2 + 1 \quad \Leftrightarrow \quad -at^2 + (2a - b)t + (b - c) = t^2 + 1$
   Par identification, $\begin{cases} -a = 1 \\ 2a - b = 0 \\ b - c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \\ c = -3 \end{cases}$
   Donc la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $y_p(t) = -t^2 - 2t - 3$ est une solution particulière de $y' - y = t^2 + 1$.
   - Donc les solutions de $y' - y = t^2 + 1$ sont les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par $y(t) = \lambda e^t - t^2 - 2t - 3$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

3. $y' + y = te^t$
   - Les solutions de l'équation homogène associée $y' + y = 0$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme $t \mapsto \lambda e^{-t}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
   - On cherche une fonction particulière du type $y_p(t) = (at + b)e^t$.
   y_P est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ par opération sur les fonctions usuelles et pout tout t réel, $y_p'(t) = ae^t + (at + b)e^t = (at + a + b)e^t$.
   y_P est solution de $y' + y = te^t$ si et seulement si $(at + a + b)e^t + (at + b)e^t = te^t \Leftrightarrow (2at + a + 2b)e^t = te^t \Leftrightarrow (2at + a + 2b) = t$
   Par identification, $\begin{cases} 2a = 1 \\ a + 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1/2 \\ b = -1/4 \end{cases}$
   Donc la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $y_p(t) = \left(\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\right)e^t$ est une solution particulière de $y' + y = te^t$.
   - Donc les solutions de $y' + y = te^t$ sont les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par $y(t) = \lambda e^{-t} + \left(\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\right)e^t$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 4

1. $y''-3y'+2y=0$. C'est une équation différentielle d'ordre 2, homogène, linéaire à coefficients constants.
   Considérons l'équation caractéristique associée $r^2-3r+2=0$, qui a pour racines 1 et 2.
   Les solutions de $y''-3y'+2y=0$ sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme $t\mapsto \lambda e^t+\mu e^{2t}$ avec λ et μ réels.

2. $y''-4y'+4y=0$. C'est une équation différentielle d'ordre 2, homogène, linéaire à coefficients constants.
   Considérons l'équation caractéristique associée $r^2-4r+4=0$, qui a pour racine double 2.
   Les solutions de $y''-4y'+4y=0$ sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme $t\mapsto(\lambda+\mu t)e^{2t}$ avec λ et μ réels.

3. $y''-2y=0$. blablabla...
   Les solutions de $y''-2y=0$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme $t\mapsto \lambda e^{\sqrt{2}t}+\mu e^{-\sqrt{2}t}$ avec λ et μ réels.

Exercice 5

Résoudre les problèmes de Cauchy suivants.

1. $\begin{cases} y''-3y'+2y=0 \\ y(0)=1 \\ y'(0)=2 \end{cases}$
   En s'aidant les réponses de l'exercice précédent, et en notant y la solution cherchée, puisque y est de classe $\mathscr{C}^1$ par opérations sur les fonctions usuelles, on a, pour tout t réel :
   $y(t)=\lambda e^t+\mu e^{2t}$ et $y'(t)=\lambda e^t+2\mu e^{2t}$ avec λ et μ réels
   on cherche donc λ et μ tels que :
   $\begin{cases} y(0)=1 \\ y'(0)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda+\mu=1 \\ \lambda+2\mu=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda=0 \\ \mu=1 \end{cases}$
   L'unique solution à ce problème de Cauchy est donc la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $y(t)=e^{2t}$

2. L'unique solution au problème de Cauchy $\begin{cases} y''-4y'+4y=0 \\ y(0)=-3 \\ y'(0)=1 \end{cases}$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $y(t)=(-3+7t)e^{2t}$

3. L'unique solution au problème de Cauchy $\begin{cases} y''-2y=0 \\ y(0)=-1 \\ y'(0)=-1 \end{cases}$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $y(t)=\left(-\frac{3}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)e^{\sqrt{2}t}+\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\right)e^{-\sqrt{2}t}$

Exercice 6

Déterminer l'ensemble des solutions des équations différentielles suivantes :

1. $y''-3y'+2y=1+t$ On cherche une solution particulière du type $y_p(t)=at+b$
   Les solutions sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(t)=\lambda e^t+\mu e^{2t}+\frac{1}{2}t-\frac{1}{4}$ avec λ et μ réels.
2. $y''-3y'+2y=te^t$ On cherche une solution particulière du type $y_p(t)=(at^2+bt)e^t$
   Les solutions sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(t)=\mu e^{2t}-\left(\frac{1}{2}t^2+t+\lambda\right)e^t$ avec λ et μ réels.
3. $y''-4y'+4y=te^{2t}$ On cherche une solution particulière du type $y_p(t)=(at^3+bt^2)e^{2t}$
4. $y''-4y'+4y=(-1+t)e^{-t}$ On cherche une solution particulière du type $y_p(t)=(at+b)e^{-t}$
5. $y''-2y=e^t$ On cherche une solution particulière du type $y_p(t)=ae^t$
6. $y''-2y=1-2t+3t^2$ On cherche une solution particulière du type $y_p(t)=at^2+bt+c$

Exercice 7

Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y''-y'=0$ de deux manières différentes :

1. En appliquant le théorème du cours sur les équations différentielles linéaires d'ordre 2.
   Comme dans l'ex 4, on passe par l'équation caractéristique.
2. En faisant un changement de fonction inconnue pour se ramener à une équation différentielle linéaire d'ordre 1.
   On pose $z=y'$. L'équation de l'énoncé revient donc à l'équation $z'-z=0$ qui est une ED d'ordre 1 en z. Une fois z trouvé, il suffit d'intégrer z pour trouver y.

Exercice 8

Soit $(a,b) \in]0,+\infty[^2$. On considère l'équation différentielle logistique (non linéaire)

$$y' = ay - aby^2 \qquad \text{(E)}$$

1. **Déterminer les équilibres de l'équation logistique.**
   Cela revient à trouver les solutions constantes. On cherche donc un réel k tel que la fonction constante y_p définie sur $\mathbb{R}$ $y_p(t) = k$ soit solution de (E). On a alors $y_p'(t) = 0$ et $y_p^2(t) = k^2$.
   y_p est solution de (E) $\Leftrightarrow$ $0 = ak - abk^2$ $\underset{a\neq 0}{\Leftrightarrow}$ $k - bk^2 = 0$ $\Leftrightarrow$ $k(1-bk) = 0$ $\Leftrightarrow$ $k = 0$ ou $k = \frac{1}{b}$.
   Les deux équilibres sont donc la constante nulle et la constante égale à $\frac{1}{b}$.
2. Soit f une solution de (E) sur $[0,+\infty[$ qui ne s'annule pas (on admet qu'une telle solution existe).
   a. On pose $z = \dfrac{1}{f}$. Montrer que z satisfait une équation différentielle linéaire.
   f est une solution de (E). C'est donc une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Elle ne s'annule pas donc son inverse z est de classe $\mathscr{C}^1$ et $z' = -\frac{f'}{f^2}$ et donc $f' = -z' \times f^2 = -\frac{z'}{z^2}$
   Or f est solution de (E) c'est à dire $f' = af - abf^2$ $\Leftrightarrow$ $-\frac{z'}{z^2} = \frac{a}{z} - \frac{ab}{z^2}$
   z étant non nulle, cela revient à écrire : $z' + az = ab$ (E_1)
   (qui est une équation différentielle du premier ordre linéaire à coefficients constant, que l'on sait donc résoudre.)

   Puis montrer que, pour tout $t \geq 0$, $z(t) = b + (z(0) - b)e^{-at}$.
   (E_1) a pour solution les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ du type $z(t) = ke^{-at} + b$ avec $k \in \mathbb{R}$ *(rédaction à étoffer)*
   avec k vérifiant $z(0) = ke^0 + b$ c'est à dire $k = z(0) - b$.
   Au final z est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $z(t) = \big(z(0) - b\big)e^{-at} + b$

   b. En déduire que, pour tout $t \geq 0$, $f(t) = \dfrac{f(0)}{bf(0) + (1 - bf(0))e^{-at}}$.
   f étant l'inverse de z, on trouve que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \dfrac{1}{b + (z(0) - b)e^{-at}}$
   Mais $z(0) = \frac{1}{f(0)}$ donc $f(t) = \dfrac{1}{b + \left(\frac{1}{f(0)} - b\right)e^{-at}}$. En multipliant en haut et en bas par $f(0)$, on trouve l'expression demandée.
3. **Calculer $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$. Que remarque-t-on ?**
   $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = \frac{1}{b}$ par opérations sur les limites. On remarque donc que la limite en l'infini des solutions est l'un des états d'équilibre.