Systèmes différentiels

Résolution de systèmes différentiels linéaires

Exercice 1 (Écriture matricielle)

Traduire sous forme matricielle les systèmes différentiels ou équation différentielle suivants :

1. $(S)\ \begin{cases} x_1'(t) = 2x_1(t) - x_2(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) - 6x_2(t) \end{cases}$
2. $(E)\ x''(t) - 2x'(t) + 3x(t) = 0$
3. $(S)\ \begin{cases} x'(t) = x(t) - z(t) \\ y'(t) = y(t) - z(t) \\ z'(t) = -x(t) + z(t) \end{cases}$

Exercice 2

Soit $A = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Vérifier que 2 est une valeur propre de A. Donner un vecteur propre associé V. En déduire une solution au système différentiel $X' = AX$

Exercice 3

Résoudre le système différentiel $X' = AX$ avec $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$

Exercice 4

Résoudre les systèmes suivants :

1. $(S_1)\ \begin{cases} x_1'(t) = 2x_1(t) + x_2(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) + 2x_2(t) \end{cases}$
2. $(S_2)\ \begin{cases} x'(t) = x(t) - z(t) \\ y'(t) = y(t) - z(t) \\ z'(t) = -x(t) + z(t) \end{cases}$
3. $(S_3)\ \begin{cases} x' = 2x - y - z \\ y' = -x + 2y - z \\ z' = -x - y + 2z \end{cases}$

Exercice 5 (Problème de Cauchy)

Résoudre les systèmes suivants vérifiant les conditions initiales :

1. $\begin{cases} x_1'(t) = 2x_1(t) + x_2(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) + 2x_2(t) \end{cases}$ avec $x_1(0) = 2$ et $x_2(0) = 0$.
2. $\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - y(t) \\ y'(t) = -x(t) + 2y(t) \end{cases}$ avec $x_1(0) = 0$ et $x_2(0) = 1$.

Exercice 6 (Lien entre équation différentielle d'ordre 2 et système différentiel)

Résoudre :

1. $x''(t) - x'(t) - 2x(t) = 0$
2. $y'' + 5y' + 4y = 0$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$

Exercice 7 (⋆ Cas où la matrice du système n'est pas diagonalisable)

On cherche à résoudre $(S)\ \begin{cases} x' = 4x - y \\ y' = x + 2y \end{cases}$

1. Traduire sous forme matricielle $X' = AX$, ce système. Montrer que A n'est pas diagonalisable.
2. On pose $P = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Montrer que P est inversible et donner P^{-1}.
3. Prouver que $P^{-1}AP$ est une matrice triangulaire que l'on notera T.
4. On pose $Y = P^{-1}X$, avec $X = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$, alors en notant $Y = \left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right)$, montrer que $Y' = P^{-1}X'$.
5. En déduire que $X' = AX \Leftrightarrow Y' = TY$.
6. Résoudre $v' = 3v$ et en déduire la solution de $Y' = TY$ (pour u, on cherchera une solution particulière de la forme $u(t) = ate^{3t}$)
7. Résoudre enfin (S)

Exercice 8 (Une équation différentielle linéaire d'ordre 3)

Résoudre l'équation différentielle suivante : $(E)\ x'''(t) - 6x''(t) + 11x'(t) - 6x(t) = 0$

Trajectoires et points d'équilibre

Exercice 9
Considérons le système $X' = AX$ avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.
Résoudre le système sur $\mathbb{R}$ et donner ses trajectoires.

Exercice 10
Soit le système (S) $\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = 2x(t) + y(t) \end{cases}$ Résoudre (S) et donner ses trajectoires.

Exercice 11 (Points d'équilibre)
On reprend le système $\begin{cases} x_1'(t) = 2x_1(t) - x_2(t) \\ x_2'(t) = -x_1(t) + 2x_2(t) \end{cases}$ Donner ses points d'équilibre.

Exercice 12 (Comportement asymptotique des trajectoires)
On reprend le système (S) $\begin{cases} x'(t) = x(t) - z(t) \\ y'(t) = y(t) - z(t) \\ z'(t) = -x(t) + z(t) \end{cases}$ Existe-t-il des états d'équilibre ?
Étudier le comportement asymptotique des trajectoires.

Exercice 13 (Étude complète)
Soit le système (S) $\begin{cases} x' = x + 3y \\ y' = x - y \end{cases}$

1. Résoudre le système (S).
2. Trouver les états d'équilibre associés à (S).
3. Existe-t-il des trajectoires de (S) qui sont convergentes ? Si oui, en donner une.
4. Justifier que toutes les trajectoires ne sont pas convergentes.

Exercice 14 (Étude complète)
Soit le système (S) $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -2x - 2y \end{cases}$

1. Montrer que toutes les trajectoires de (S) sont convergentes.
2. Montrer qu'il existe une infinité d'états d'équilibre associés à (S) et les donner.
3. Résoudre le système (S).
4. Trouver une trajectoire qui converge vers l'état d'équilibre $(2, -2)$.

Sujet 0 d'EML

Disponible en cliquant sur ce lien