Systèmes différentiels - éléments de correction

1. Résolution de systèmes différentiels linéaires

Exercice 1 (Écriture matricielle)

Traduire sous forme matricielle les systèmes différentiels ou équation différentielle suivants :

1. En posant $X=\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$, $X'=\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix}$ et $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}$, on a l'équivalence $(S) \Leftrightarrow X'=AX$
2. En posant $X=\begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$, $X'=\begin{pmatrix} x'(t) \\ x''(t) \end{pmatrix}$ et $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, on a l'équivalence $(E) \Leftrightarrow X'=AX$
3. En posant $X=\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$, $X'=\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$ et $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a l'équivalence $(S) \Leftrightarrow X'=AX$

Exercice 2

$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Vérifions tout d'abord que 2 est une valeur propre de A en donnant un vecteur propre associé à V.

On cherche $V=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $V\neq 0$, tel que $(A-2I)V=0$. $(A-2I)V=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ -x-y=0 \end{cases} \quad x=-y \Leftrightarrow V=x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $x\in\mathbb{R}$.

$V=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 2.
Alors la fonction $t\mapsto e^{2t}V$, définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ est solution du système différentiel $X'=AX$.

Exercice 3

Résolution du système différentiel $X'=AX$ avec $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$: A est symétrique donc diagonalisable. L'étude de la diagonalisation de A donne : $Sp(A)=\{1,4\}$, $E_1(A)=\text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ et $E_4(A)=\text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$
Alors le théorème du cours permet de dire que l'ensemble des solutions de $X'=AX$ est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :
$\left\{X : t\mapsto \alpha_1 e^{4t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}+\alpha_2 e^{t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}+\alpha_3 e^{t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\in\mathbb{R}^3\right\}$

Exercice 4

Dans chacun des cas suivant, après avoir déterminé les éléments propres de matrices de ces systèmes, on pense bien à dire que les matrices sont diagonalisables avant d'appliquer le théorème du cours.

1. Les solutions de (S_1) $\begin{cases} x_1'(t)=2x_1(t)+x_2(t) \\ x_2'(t)=x_1(t)+2x_2(t) \end{cases}$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de l'ensemble $\left\{X : t\mapsto \alpha e^{t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}+\beta e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, (\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2\right\}$

   C'est à dire x_1 et y_2 sont les fonctions dénifies sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} x_1(t)=\alpha e^{t}+\beta e^{3t} \\ x_2(t)=-\alpha e^{t}+\beta e^{3t} \end{cases}$ avec $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$.
2. Les solutions de (S_2) $\begin{cases} x'(t)=x(t)-z(t) \\ y'(t)=y(t)-z(t) \\ z'(t)=-x(t)+z(t) \end{cases}$ st les fcts définies sur $\mathbb{R}$ de l'ensemble $\left\{X : t\mapsto \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}+\beta e^{t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+\gamma e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, (\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3\right\}$

   C'est à dire x, y et z sont les fonctions dénifies sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} x(t)=\alpha+\gamma e^{2t} \\ y(t)=\alpha+\beta e^{t}+\gamma e^{2t} \\ z(t)=\alpha-\gamma e^{2t} \end{cases}$ avec $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3$.
3. Les solutions de (S_3) $\begin{cases} x'=2x-y-z \\ y'=-x+2y-z \\ z'=-x-y+2z \end{cases}$ st les fcts définies sur $\mathbb{R}$ de l'ensemble $\left\{X : t\mapsto \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}+\beta e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}+\gamma e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, (\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3\right\}$

   C'est à dire x, y et z sont les fonctions dénifies sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} x(t)=\alpha+(\beta+\gamma)e^{3t} \\ y(t)=\alpha-\beta e^{3t} \\ z(t)=\alpha-\gamma e^{3t} \end{cases}$ avec $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3$.

Exercice 5 (Problème de Cauchy)

1. L'unique solution de $\begin{cases} x_1'(t)=2x_1(t)+x_2(t) \\ x_2'(t)=x_1(t)+2x_2(t) \end{cases}$ avec $x_1(0)=2$ et $x_2(0)=0$ est le couple de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :
   $x_1(t)=e^{t}+e^{3t}$, $x_2(t)=-e^{t}+e^{3t}$
2. L'unique solution de $\begin{cases} x'(t)=2x(t)-y(t) \\ y'(t)=-x(t)+2y(t) \end{cases}$ avec $x_1(0)=0$ et $x_2(0)=1$ est le couple de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :
   $x(t)=\frac{1}{2}(e^{t}-e^{3t})$, $y(t)=\frac{1}{2}(e^{t}+e^{3t})$

Exercice 6 (Lien entre équation différentielle d'ordre 2 et système différentiel)

1. En posant $X=\begin{pmatrix} x(t)\\ x'(t)\end{pmatrix}$, et $A=\begin{pmatrix} 0&1\\ 2&1\end{pmatrix}$ alors on a l'équivalence suivante : $x''(t)-x'(t)-2x(t)=0 \Leftrightarrow X'=AX$.
L'étude des éléments propres de A donne : $Sp(A)=\{-1,2\}$ et $V_1=\begin{pmatrix} 1\\ -1\end{pmatrix}$ est une base de $E_{-1}(A)$ et $V_2=\begin{pmatrix} 1\\ 2\end{pmatrix}$ est une base de $E_2(A)$.
On en déduit du théorème du cours que l'ensemble des solutions de $X'=AX$ est : $\{t\mapsto X(t)=\alpha e^{-t}\begin{pmatrix} 1\\ -1\end{pmatrix}+\beta e^{2t}\begin{pmatrix} 1\\ 2\end{pmatrix},(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2\}$.
Donc l'ensemble des solutions de l'équation est $\{t\mapsto x(t)=\alpha e^{-t}+\beta e^{2t},(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2\}$

2. En utilisant la même technique que dans la question 1., on trouve que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle est $\{t\mapsto y(t)=\alpha e^{-t}+\beta e^{-4t},(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2\}$. D'où $y'(t)=-\alpha e^{-t}-4\beta e^{-4t}$ pour tout t réel
Or $y(0)=1$ et $y'(0)=2$ donc α et β vérifient $\begin{cases}\alpha+\beta &= 1\\ -\alpha-4\beta &= 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha &= 2\\ \beta &= -1\end{cases}$
Au final l'unique fonction solution de ce problème de Cauchy est : $t\mapsto 2e^{-t}-e^{-4t}$

Exercice 7 (★ Cas où la matrice du système n'est pas diagonalisable)

Étude du sytème différentiel (S) : $\begin{cases} x'=4x-y\\ y'=x+2y\end{cases}$ On remarque qu'en posant $A=\begin{pmatrix} 4&-1\\ 1&2\end{pmatrix}$ et $X=\begin{pmatrix} x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}$, $X'=\begin{pmatrix} x'(t)\\ y'(t)\end{pmatrix}$ alors on a l'équivalence suivante :
$(S)\Leftrightarrow X'=AX$.
On cherche ensuite $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $A-\lambda I$ non inversible.
$A-\lambda I$ non inversible si et seulement si : $(4-\lambda)(2-\lambda)+1=0 \Leftrightarrow \lambda^2-6\lambda+9=0\Leftrightarrow(\lambda-3)^2=0$.
D'où : $Sp(A)=\{3\}$.
Montrons alors par l'absurde que A n'est pas diagonalisable.
Si A était diagonalisable, il existerait P inversible et D diagonale telles que : $A=PDP^{-1}$, avec $D=3I$. D'où, $A=P3IP^{-1}=3I$ ce qui est absurde.
Ainsi A n'est pas diagonalisable.

Soit $P=\begin{pmatrix} 1&1\\ 1&0\end{pmatrix}$ est inversible car $1\times 0-1=-1\neq 0$.

D'après le cours on a $P^{-1}=\begin{pmatrix} 0&1\\ 1&-1\end{pmatrix}$.

Soit $P=\begin{pmatrix} 1&1\\ 1&0\end{pmatrix}$ est inversible car $1\times 0-1=-1\neq 0$.
D'après le cours on a $P^{-1}=\begin{pmatrix} 0&1\\ 1&-1\end{pmatrix}$.

Par calcul direct, on a : $AP=\begin{pmatrix} 3&4\\ 3&1\end{pmatrix}$, puis $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 3&1\\ 0&3\end{pmatrix}$ qui est une matrice triangulaire que l'on note T.
On pose $Y=P^{-1}X$, $X=\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}$ alors $Y=\begin{pmatrix} y\\ x-y\end{pmatrix}$.
On note $Y=\begin{pmatrix} u\\ v\end{pmatrix}$, alors $Y'=\begin{pmatrix} u'\\ v'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y'\\ x'-y'\end{pmatrix}=P^{-1}X'$ par linéarité de la dérivation. On a $X'=AX \Leftrightarrow P^{-1}X'=P^{-1}AX=TP^{-1}X$ car $P^{-1}AP=T\Leftrightarrow P^{-1}A=TP^{-1}$. Avec $Y=P^{-1}X$, cela entraîne que $X'=AX\Leftrightarrow Y'=TY$. L'équation différentielle $v'=3v$ a pour ensemble solution $\{v:t\mapsto\alpha e^{3t},\alpha\in\mathbb{R}\}$.
Le système $Y'=TY$ est équivalent à : $\begin{cases} u'=3u+v\\ v'=3v\end{cases}$
Il faut donc résoudre l'équation différentielle du premier ordre $u'=3u+\alpha e^{3t}$.
La solution de l'équation homogène associée est $t\mapsto\beta e^{3t}$.

La solution de l'équation homogène associée est $t\mapsto\beta e^{3t}$.
On cherche une solution particulière sous la forme $t\mapsto ate^{3t}$.
On obtient alors : $(3at+a)e^{3t}=(3at)e^{3t}+\alpha e^{3t}$ d'où $a=\alpha$.
La solution à l'équation $u'=3u+\alpha e^{3t}$ est donc $t\mapsto\beta e^{3t}+\alpha te^{3t}$.
Ainsi l'ensemble des solutions du système $Y'=TY$ est : $\left\{Y:t\mapsto\begin{pmatrix}(\beta+\alpha t)\\ \alpha\end{pmatrix}e^{3t},(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2\right\}$.

On a $Y=P^{-1}X$ donc $X=PY$. D'où d'après la question précédente l'ensemble des solutions du système $X'=AX$ est : $\left\{X:t\mapsto\begin{pmatrix}(\beta+\alpha t)+\alpha\\ (\beta+\alpha t)\end{pmatrix}e^{3t},(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2\right\}$.

Exercice 8 (Une équation différentielle linéaire d'ordre 3)

Résoudre l'équation différentielle (E) $x'''(t)-6x''(t)+11x'(t)-6x(t)=0$ se déduit de la résolution du système linéaire $X'=AX$ avec $X=\begin{pmatrix} x(t)\\ x'(t)\\ x''(t)\end{pmatrix}$, $X'=\begin{pmatrix} x'(t)\\ x''(t)\\ x'''(t)\end{pmatrix}$ et $A=\begin{pmatrix} 0&1&0\\ 0&0&1\\ 6&-11&6\end{pmatrix}$ car (E) est équivalente au système : $\begin{cases} x'(t)= & x'(t)\\ x''(t)= & x''(t)\\ x'''(y)=6x(t)-11x'(t)+6x''(t)\end{cases}$

λ est valeur propre de A si et seulement si $A=\begin{pmatrix} -\lambda&1&0\\ 0&-\lambda&1\\ 6&-11&6-\lambda\end{pmatrix}$ est non inversible.

Or le caractère inversible d'une matrice est conservé par opérations de Gauss successives. On fait donc de telles opérations dans le but de rendre la matrice précédente triangulaire, il sera facile de caractériser son inversibilité en observant les conditions d'annulation des coefficients diagonaux selon les valeurs de λ. Tout au long de la résolution on veillera à travailler avec des pivots indépendants de λ (avec donc la garantie qu'ils ne puissent s'annuler, ce qui est interdit pour un pivot)
Les matrices suivantes sont obtenues par les opérations de Gauss sur les lignes décrites à droite :

$$\begin{pmatrix} -\lambda&1&0\\ 0&-\lambda&1\\ 6&-11&6-\lambda\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6&-11&6-\lambda\\ 0&-\lambda&1\\ -\lambda&1&0\end{pmatrix} L_1\leftrightarrow L_3$$

$$\begin{pmatrix} 6&-11&6-\lambda\\ 0&-\lambda&1\\ 0&6-11\lambda&\lambda(6-\lambda)\end{pmatrix} L_3\leftarrow 6L_3+\lambda L_1$$

$$\begin{pmatrix} 6&-11&6-\lambda\\ 0&6-11\lambda&\lambda(6-\lambda)\\ 0&-\lambda&1\end{pmatrix} L_3\leftrightarrow L_2$$

$$\begin{pmatrix} 6&-11&6-\lambda\\ 0&\mathbf{6}&\lambda(6-\lambda)-11\\ 0&-\lambda&1\end{pmatrix} L_2\leftarrow -11L_3+L_2$$ comb lin ayant pour but de rendre le pivot suivant indépendant de λ

$$\begin{pmatrix} 6&-11&6-\lambda\\ 0&6&\lambda(6-\lambda)-11\\ 0&0&6+[\lambda(6-\lambda)-11]\lambda\end{pmatrix} L_3\leftarrow 6L_3+\lambda L_2$$

Or $6+[\lambda(6-\lambda)-11]\lambda=0$ lorsque $\lambda\in\{1,2,3\}$ donc $Sp(A)=\{1,2,3\}$. Vous devez savoir faire la suite...(recherche des sous-espaces propres de A, justification de sa diagonalisabilité, solutions du système différentiel et extraction de la première composante des solutions pour donner les solutions de l'équation différentielle de départ.)
Au final, les solutions de (E) sont données par les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x(t)=ae^t+be^{2t}+ce^{3t}$ avec $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$.

2. Trajectoires et points d'équilibre

Exercice 9

Se référer aux deux exemples similaires du cours. On essayera de décrire les courbes dans les différents cas selon la nullité de l'un, l'autre, ou les deux constantes introduites pour lister l'infinité des solutions.

Exercice 10

L'ensemble des solutions de (S) est donné par les fonctions $\{t \mapsto \alpha e^{-t} + \beta e^{2t}, t \mapsto -\alpha e^{-t} + 2\beta e^{2t}, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$
Les trajectoires associées sont donc les $\left(\alpha e^{-t} + \beta e^{2t}, -\alpha e^{-t} + 2\beta e^{2t}\right)$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

Exercice 11 (Points d'équilibre)

La matrice associée à ce système différentiel est la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Cette matrice est inversible car $det(A) = 4 - 1 = 3 \neq 0$. Or les états d'équilibre associés à (S) s'obtiennent en résolvant $AV = 0$. Puisque A est inversible, il s'agit d'un système de Cramer qui n'admet comme solution que le vecteur $V = 0$. Donc le seul point d'équilibre est l'origine $(0, 0)$.

Exercice 12 (Comportement asymptotique des trajectoires)

On a vu que la matrice associée à ce système est $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Elle est non inversible et $Sp(A) = \{0, 1, 2\}$.
Trouver les trajectoires revient à résoudre $AV = 0$, c'est ce qui a été fait dans l'exercice 4 quand on a cherché les vecteurs propres de A associés à la valeur propre 0. Il s'agit des vecteurs de Vect$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.
Donc les points d'équilibre sont les points (α, α, α), avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

De plus, A est diagonalisable et l'ensemble des solutions de (S) est $\left\{\begin{array}{l} x(t) = \alpha + \gamma e^{2t} \\ y(t) = \alpha + \beta e^{t} + \gamma e^{2t} \\ z(t) = \alpha - \gamma e^{2t} \end{array}\right.$ avec $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$.

Les trajectoires associées sont donc les $(\alpha + \gamma e^{2t}\ ,\ \alpha + \beta e^{t} + \gamma e^{2t}\ ,\ \alpha - \gamma e^{2t}, t \in \mathbb{R})$, avec $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$.
Les seules trajectoires qui convergent, sont les états d'équilibres (α, α, α) pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ car si $\beta = \gamma = 0$,
alors $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} y(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} z(t) = \alpha$
Toutes les autres trajectoires divergent car $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{t} = \lim\limits_{t \to +\infty} e^{2t} = +\infty$.

Exercice 13 (Étude complète)

Soit le système (S) $\left\{\begin{array}{l} x' = x + 3y \\ y' = x - y \end{array}\right.$

1. $\left\{\begin{array}{l} x(t) = \alpha e^{-2t} + 3\beta e^{2t} \\ y(t) = -\alpha e^{-2t} + \beta e^{2t} \end{array}\right.$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$
2. le seul état d'équilibre associés à (S) est $(0, 0)$.
3. En choisissant $\beta = 0$, on obtient les trajectoires convergentes.
   Par exemple, pour $(\alpha, \beta) = (1, 0)$, la trajectoire $(e^{-2t}, -e^{-2t}, t \in \mathbb{R})$ est une trajectoire convergente.
4. Toutes les trajectoires ne sont pas convergentes : en prenant $(\alpha, \beta) = (0, 1)$, la trajectoire $(3e^{2t}, e^{2t}, t \in \mathbb{R})$ est une trajectoire divergente car chaque composante diverge vers $+\infty$.