Intégration - Rappels de première année

Pour reprendre les techniques de l'intégration depuis la base en partant de la détermination de primitives, jusqu'aux techniques d'IPP et de changement de variables vues l'an dernier, énormément d'exercices d'entrainement sont disponibles sur cette page

Exercice 1 (Intégrales et primitives)

Calculer les intégrales suivantes : $I = \displaystyle\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$ $\qquad J = \displaystyle\int_0^3 \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ $\qquad K = \displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1}{t(\ln t)^2}\,\mathrm{d}t$

Plus de calculs similaires dans la thématique 17 de la fiche de calcul, avant cela, il faut évidemment être très au point sur la thématique précédente (détermination de primitives).

Exercice 2 (Intégration par parties)

En effectuant une intégration par partie, calculer les intégrales suivantes : $I = \displaystyle\int_1^e \ln t\,\mathrm{d}t$

Plus de calculs similaires dans la thématique 18 de la fiche de calcul.

Exercice 3 (Intégrales diverses)

Calculer les intégrales suivantes en utilisant la technique la plus appropriée

1. $I_1 = \displaystyle\int_1^e \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.
2. $I_2 = \displaystyle\int_1^2 3^t\,\mathrm{d}t$.
3. $I_3 = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+4u}\,\mathrm{d}u$.
4. $I_4 = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}\,\mathrm{d}x$.
5. $I_5 = \displaystyle\int_0^2 \frac{1}{t^2+4t+4}\,\mathrm{d}t$.
6. $I_6 = \displaystyle\int_1^4 \frac{1+t}{1+\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

Pour I_6, poser $u = \sqrt{t}$ puis déterminer quatre réels a, b, c et d tels que $\frac{2u+2u^3}{1+u} = au^2+bu+c+\frac{d}{1+u}$ pour tout $u \neq -1$.

Exercice 4

Déterminer le domaine d'existence, et calculer $I(x) = \displaystyle\int_0^x 2te^{1+t^2}\,dt$ puis $J(x) = \displaystyle\int_0^x 2t^3e^{1+t^2}\,dt$.

Exercice 5

Soit p et q deux entiers naturels. On pose : $I_{p,q} = \displaystyle\int_0^1 x^p(1-x)^q\,dx$.

1. Exprimer $I_{p+1,q}$ en fonction de $I_{p,q+1}$.
2. Calculer $I_{0,q}$.
3. En déduire l'expression de $I_{p,q}$ en fonction de p et q.

Exercice 6

On pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n e^{-t}\,dt$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$. *On pourra faire un encadrement.*
2. Établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.
3. En déduire que $I_n = n!\left(1 - \dfrac{1}{e}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)$.
4. Que vaut $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$.

Exercice 7

Soit G la fonction définie par $G(x) = \displaystyle\int_x^{x^2}\frac{1}{\ln(t)}\,dt$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de G.
2. Étudier les variations de G.
3. Calculer $\displaystyle\int_x^{x^2}\frac{1}{t\ln(t)}\,dt$.
4. Montrer que :
$$\forall x \in]0,1[, \quad x^2\ln(2) \leq G(x) \leq x\ln(2)$$
$$\forall x > 1, \quad x\ln(2) \leq G(x) \leq x^2\ln(2)$$
On pourra utiliser : $\dfrac{1}{\ln(t)} = t\left(\dfrac{1}{t\ln(t)}\right)$.
5. Déterminer les limites de G aux bornes de son ensemble de définition.
Pourquoi peut-on prolonger G par continuité en 0 et en 1 ?