Intégration - éléments de correction

1. Intégration sur un segment

Exercice 1 (Avec une primitive "à vue")

Calculer les intégrales suivantes :

$I_1 = -\frac{1}{6}$ $\quad I_2 = \frac{1441}{5}$ $\quad I_3 = 0$ $\quad I_4 = -\frac{3}{8}$

$I_5 = \frac{8-4\sqrt{2}}{3}$ $\quad I_6 = \ln 2$ $\quad I_7 = \frac{1}{2}$ $\quad I_8 = -\frac{1}{2}(e^{-1} - e^3)$ $\quad I_9 = \frac{1}{3}\ln 5$

Exercice 2 (Intégration par parties)

$I = \frac{1}{4}(1-3e^{-2})$ $\quad J = 2\ln 2 - \frac{3}{4}$ $\quad K = 5e - 4$

Exercice 3 (Changement de variables)

1. $\frac{26}{3}$ **2.** $4 - 2\ln 3$ **3.** $\ln(1+\ln 2)$

Exercice 4

Un changement de variable $u = \frac{1}{t}$ dans la deuxième intégrale peut être une des preuves possible.

2. Intégrales généralisées

Exercice 5 (Nature d'intégrales impropres)

On rappelle la rédaction à apporter pour les critères :

① Dire que la fonction que l'on intègre est bien continue sur l'intervalle considéré (avec la borne finie fermée)
② Préciser les éléments de comparaisons entre cette fonction et une autre ($\leq$, $o(...)$ (souvent $o(\frac{1}{t^2})$) ou $\sim$)
③ Mentionner que ces deux fonctions sont à valeurs positives sur l'intervalle considéré
④ Justifier la nature de l'intégrale de la fonction à laquelle on compare celle de l'énoncé
⑤ Citer le critère utilisé avant de conclure ⚠ : **la rédaction est différente selon le critère pour ce quatrième point :**

↪ Pour le critère d'équivalence, même rédaction dans le cas des intégrales cv et dv :
"d'après le critère d'équivalence, les intégrales impropres $\int$ *cherchée* et $\int$ *référence* sont de même nature. Puisque $\int$ *référence* cv (resp dv), alors $\int$ *cherchée* cv (resp dv)".

↪ Pour les deux autres critères, la rédaction est différente quand on parle d'intégrale cv ou dv (il faut donc avoir une idée de la réponse avant de rédiger et faire les recherches, d'où une bonne intuition que l'on ne peut acquérir qu'avec de la pratique !). ⚠ C'est la **place** de la fonction cherchée ou de la fonction de référence à laquelle on la compare qui change :

∘ Dans le cas d'intégrales **cv** : on montre que ***fct_cherchée*** $= o($***fct_ref***$)$ ou ***fct_cherchée*** $\leq$ ***fct_ref***
∘ Dans le cas d'intégrales **dv** : on montre que ***fct_ref*** $= o($***fct_cherchée***$)$ ou ***fct_ref*** $\leq$ ***fct_cherchée***
"d'après le critère de comparaison (resp de négligeabilité), puisque l'intégrales impropres $\int$ *référence* est cv (resp dv), alors $\int$ *cherchée* cv (resp dv)"

1. Critère de comparaison ou critère d'équivalence (s'entraîner avec les 2 rédacs !) par rapport à la fonction $\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}$ Intégrale dv.
2. Critère d'équivalence par rapport la fonction $\frac{1}{t^2}$ Intégrale cv.
3. Critère d'équivalence par rapport à la fonction e^{-t} Intégrale cv.
4. Critère de négligeabilité par rapport à la fonction $\frac{1}{t^2}$. Attention à bien contourner le problème en 0 (qui n'en est pas un pour la fonction demandée mais qui en est un pour la fonction de référence qui donne une intégrale de Riemann !) On pensera à couper l'intégrale de départ en 1 par exemple. Intégrale cv.
5. Pas besoin de critère puisque l'on est capable de calculer l'intégrale sur un segment et de faire tendre la borne supérieure vers l'infini. Intégrale cv de valeur $\frac{1}{\ln 2}$
6. Intégrale doublement impropre. On la coupe en 0 et on constate que l'intégrale dv grossièrement en $-\infty$.

Exercice 6

Prouver la convergence, et le cas échéant calculer la valeur de chacune des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx$ — Cv car intégrale de Riemann cv $(\frac{3}{2} > 1)$ de valeur $\sqrt{2}$

2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(2x+3)^2}\,\mathrm{d}x$ cv de valeur $\frac{1}{6}$ (par primitivation)
Attention, si on veut la comparer à une intégrale de Riemann pour prouver sa convergence, c'est possible, mais dans ce cas, il faut couper l'intégrale en deux pour contourner le problème en zéro pour l'intégrale de Riemann (qui n'est pas un problème pour l'intégrale de départ)
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ cv de valeur $\frac{1}{2}$ (par primitivation)
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2e^{-2x}\,\mathrm{d}x$
La cv se prouve par le critère de négligeabilité (Attention au problème en zéro !) mais pour la valeur, on attendra de traiter le chapitre des variables aléatoires continues.
5. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ utiliser une IPP sur un segment puis passer à la limite pour la borne sup infinie. Valeur 1
6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^3e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ utiliser une IPP sur un segment puis passer à la limite pour la borne sup infinie et utiliser le **3.** Valeur $\frac{1}{2}$

Exercice 7

1. Montrer que $\forall t \geq 1,\ \frac{1}{t(t+1)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}$: On part du membre de droite pour arriver au membre de gauche.
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(t+1)} = \ln 2$

Exercice 8

On désigne par n un entier naturel.

1. **a.** On différentie le cas $n=0$ (simple limite) du cas $n \geq 1$ où on doit mettre en évidence une croissance comparée (il s'agit d'étudier la limite de $\dfrac{(\ln t)^n}{t}$ en $+\infty$)
   b. Rédaction classique du critère de négligeabilité.
2. **a.** On calcule l'intégrale entre 0 et M et on fait tendre M vers l'infini. On trouve $\frac{1}{2}$.
   b. On pense bien à faire l'IPP sur le segment $[0, M]$ (on pose $u(x) = (\ln t)^{n+1}$ et $v'(t) = \frac{1}{t^3}$), puis une fois l'IPP finie, on passe à l'infini. On trouve $I_{n+1} = \frac{n+1}{2} I_n$
   c. Une simple récurrence permet de conclure.