Variables aléatoires réelles à densité

Exercice 1 (Familiarisation avec la fonction de répartition)

Soit X une variable à densité de fonction de répartition F, et de support réel. Exprimer les probabilités suivantes grâce à la fonction de répartition F.

1. $\mathrm{P}(X \leq 4)$
2. $\mathrm{P}(X > t)$
3. $\mathrm{P}(X \geq -2)$
4. $\mathrm{P}(-3 \leq X < 7)$
5. $\mathrm{P}(-x^2 < X < 1-x)$
6. $\mathrm{P}\big(X \in \,]-2, x^2-1]\big)$
7. $\mathrm{P}\big(X \in \,]-\infty; 2]\big)$
8. $\mathrm{P}\big(X \in [-t; +\infty[\big)$
9. $\mathrm{P}\big(X \in \,]-\infty; t] \cup [t+3; +\infty[\big)$
10. $\mathrm{P}(Y < 7)$ avec $Y = 5X+2$
11. $\mathrm{P}(Y > 5)$ avec $Y = 1-2X$

Exercice 2 (Trouver une fonction densité à partir d'une fonction de répartition)

Soit $a > 0$ fixé.
On note F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x(2a-x)}{a^2} & \text{si } 0 \leq x \leq a \\ 1 & \text{si } x > a \end{cases}$$

1. Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité X dont on déterminera une densité f. (facultatif : tracer la courbe représentative de F et de f.)
2. Montrer que X admet une espérance et la calculer.
3. Montrer que X admet une variance et la calculer.

Exercice 3 (Montrer qu'une fonction est une fonction de répartition d'une variable à densité)

1. Soit X une variable aléatoire réelle, de fonction de répartition F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \begin{cases} 1-e^{-x^2} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.
   Montrer que F est une fonction de répartition d'une variable à densité.
2. Même exercice avec g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x^3 & \text{si } x \in]0,1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Exercice 4 (Trouver une densité à partir d'une fonction de répartition)

Soit X la variable aléatoire définie dans la question 2. de l'exercice 3. Déterminer une densité de X.

Exercice 5 (Exercice incontournable à savoir faire)

Soit $c \in \mathbb{R}$. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} \frac{c}{(1+x)^2} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1. Déterminer c pour que f soit une densité de probabilité. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.
2. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. Montrer que X admet une espérance et une variance et les calculer.

Exercice 6 (exercice du même type)

Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } x \in [-1;1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est une densité de probabilité.

Donnner la fonction de répartition F d'une variable X de densité f. Déterminer si possible $\mathrm{E}(X)$ et $\mathrm{V}(X)$.

Exercice 7 (idem)

Même exercice avec la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$

Exercice 8 (Idem avec en plus l'espérance et la variance de l'inverse d'une loi)

1. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Montrer, grâce à une intégration par parties, que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^n}\,\mathrm{d}x$ converge et donner sa valeur en fonction de n.
2. On note f la fonction définie par $= f(x) = 9\frac{\ln x}{x^4}$ si $x \geq 1$ et 0 sinon. Montrer que f est une densité de probabilité.
3. On considère une variable aléatoire X admettant f comme densité. Utiliser la première question pour montrer que X a une espérance et une variance et donner leurs valeurs.
4. On pose $Y = \frac{1}{X}$ et on admet que Y est une variable aléatoire à densité. Sans chercher à connaître une densité de Y, montrer l'existence et donner la valeur de $\mathrm{E}(Y)$ et $\mathrm{V}(X)$.

Exercice 9

Soit X de densité donnée par $f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1. Déterminer $\mathrm{P}(X \leq 2)$ et $\mathrm{P}(2 \leq X \leq 3)$
2. Déterminer $\mathrm{P}(X > 2)$ puis $\mathrm{P}_{(X>3)}(X > 5)$. Qu'observe-t-on ?

Exercice 10 (Loi de max)

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de fonction de répartition F définie par $F(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ x \text{ si } x \in [0;1] \\ 1 \text{ sinon} \end{cases}$
Déterminer la loi du maximum S des deux variables aléatoires X et Y.

Exercice d'annales

Exercice 11 (d'après Ecricome)

Après enquête, on estime que le temps de passage à une caisse, exprimé en unités de temps, peut être modélisé par une variable aléatoire T admettant pour densité la fonction f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x\,e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

1. Rappeler la définition d'une densité de probabilité d'une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle de paramètre 1. Donner la valeur de l'espérance et de la variance de X. (c'est la v.a.r. que l'on a étudié dans les exercices 3, 4, 8.1 et 11 du cours)
2. Utiliser la question précédente pour vérifier que f est bien une densité de probabilité, puis montrer que T admet une espérance que l'on déterminera.
   Quel est le temps moyen de passage en caisse ?
3. **a.** Démontrer que la fonction de répartition F_T de T est telle que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_T(x) = \begin{cases} 1-(x+1)\,e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$
   b. Montrer que la probabilité que le temps de passage en caisse soit inférieur à deux unités de temps sachant qu'il est supérieur à une unité est $\frac{2e-3}{2e}$.
4. Un jour donné, trois clients A, B et C se présentent simultanément devant deux caisses libres. Par courtoisie, C décide de laisser passer A et B et de prendre la place du premier d'entre eux qui aura terminé. On suppose que les variables T_A et T_B correspondant au temps de passage en caisse de A et B sont indépendantes.
   a. La lettre M désignant le temps d'attente du client C, exprimer M en fonction de T_A et T_B.
   b. Montrer que la fonction de répartition F_M de la variable aléatoire M est telle que
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_M(x) = \begin{cases} 1-(1+x)^2\,e^{-2x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$
   c. Établir que M est une variable à densité et expliciter une densité de M.