Intégration - Rappels de première année
éléments de correction

Exercice 1 (Intégrales et primitives)

$I = \int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = \left[\sqrt{x^2+1}\right]_0^3 = \sqrt{10}-1$
$J = \int_0^3 \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|\right]_0^3 = \frac{1}{2}\left(\ln(10)\right)$
$K = \int_e^{e^2} \frac{1}{t(\ln t)^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{\ln t}\right]_e^{e^2} = -\frac{1}{2}+1 = \frac{1}{2}$
(en effet, si $u(t) = \frac{1}{\ln t}$, $u'(t) = -\frac{1}{t(\ln t)^2}$)

Exercice 2 (Intégration par parties)
En effectuant une intégration par partie, calculer les intégrales suivantes : $I = \int_1^e \ln t\,\mathrm{d}t$

Posons : $u(t) = \ln t$ donc $u'(t) = \frac{1}{t}$
et $v'(t) = 1$ avec $v(t) = t$ u et v sont $\mathscr{C}^1$.

On peut donc effectuer une intégration par parties : $I = \int_1^e \ln t\,\mathrm{d}t = \left[t\ln t\right]_1^e - \int_1^e 1\,\mathrm{d}t = e - \left[t\right]_1^e = e-e+1 = 1$

Exercice 3 (Intégrales diverses)
Résultats bruts, partiellement ou complètement dévelopés :

1. $I_1 = \frac{1}{2}$.
2. $I_2 = \frac{6}{\ln 3}$.
3. $I_3 = \int_0^1 \sqrt{1+4u}\,\mathrm{d}u \underset{t=1+4u}{=} \frac{1}{4}\int_1^5 \sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\frac{2}{3}\int_1^5 t^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}t = \frac{5\sqrt{5}-1}{6}$
4. $I_4 = \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$
5. $I_5 = \frac{1}{4}$.
6. $I_6 = \frac{17}{3} - 4\ln\frac{3}{2}$.

Pour I_6, posons $u = \sqrt{t}$
On a alors $t = u^2$ et $\mathrm{d}t = 2u\,\mathrm{d}u$
Bornes d'intégration : Lorsque $t = 1$, $u = 1$ Lorsque $t = 4$, $u = 2$.
On en déduit que $I_6 = \int_1^2 \frac{1+u^2}{1+u} 2u\,\mathrm{d}u = \int_1^2 \frac{2u+2u^3}{1+u}\,\mathrm{d}u$.
De plus, pour tout $u \neq 1$,

$$\begin{aligned}
\frac{2u+2u^3}{1+u} &= au^2+bu+c+\frac{d}{1+u}\\
&= \frac{d+(au^2+bu+c)(1+u)}{1+u}\\
&= \frac{(c+d)+(b+c)u+(a+b)u^2+au^3}{1+u}\\
2u+2u^3 &= (c+d)+(b+c)u+(a+b)u^2+au^3 \qquad \text{car } 1+u
\end{aligned}$$

Par identification, $\begin{cases} c+d=0\\ b+c=2\\ a+b=0\\ a=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2\\ b=-2\\ c=4\\ d=-4\end{cases}$
$\frac{2u+2u^3}{1+u} = 2u^2-2u+4-\frac{4}{1+u}$ pour tout $u \neq -1$.
On en déduit que

$$\begin{aligned}
I_6 &= \int_1^2 2u^2-2u+4-\frac{4}{1+u}\,\mathrm{d}u\\
&= \left[\frac{2}{3}u^3-u^2+4u-4\ln\left|1+u\right|\right]_1^2\\
&= \frac{2}{3}\times 7-3+4-4\ln\frac{3}{2} = \frac{17}{3}-4\ln\frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Exercice 4
$I(x) = e^{1+x^2} - e$
$J(x) = x^2e^{1+x^2} - e^{1+x^2} + e$

Exercice 5

1. $I_{p+1,q} = \frac{p+1}{q+1} I_{p,q+1}$
2. $I_{0,q} = \frac{1}{q+1}$
3. $I_{p,q} = \binom{q+p}{p} \frac{1}{q+1}$.

Exercice 6

On pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n e^{-t}\, dt$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. On part de l'encadrement $e^{-1} \leq e^{-t} \leq 1$ pour tout t de l'intervalle $[0;1]$
2. $I_{n+1} = \frac{1}{e} + (n+1) I_n$.
3. Démonstration par récurrence.
4. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e$.

Exercice 7

Soit G la fonction définie par $G(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)}\, dt$.

1. $\mathscr{D}_G =]0;1[\cup]1;+\infty[$.
2. $G'(x) = \frac{x-1}{\ln x}$. G est donc croissante partout où elle est définie.
3. $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln(t)}\, dt = \ln 2$.
4. Dans les deux cas, on encadre t entre x et x^2 et on se sert de la question précédente.
5. On se sert du théorème d'encadrement et du théorème de minoration grâce aux inégalités trouvées dans la question précédente. On trouve $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} G(x) = \lim_{x\to 1^+} G(x) = \ln 2$ on peut donc prolonger G par continuité en posant $\tilde{G}(x) = G(x)$ pour $x \in]0;1[\cup]1;+\infty[$, et $\tilde{G}(1) = \ln 2$.