Intégration

1. Encore des rappels d'intégration sur un segment

Exercice 1 (Grâce à la connaissance d'une primitive)

Calculer les intégrales suivantes :

$I_1 = \int_1^2 (x-1)(x-2)\,\mathrm{d}x$ $\quad I_2 = \int_0^1 (5-2x)^4\,\mathrm{d}x$ $\quad I_3 = \int_0^1 3\sqrt{x} - 4x\,\mathrm{d}x$ $\quad I_4 = \int_{-2}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{x^3}$

$I_5 = \int_0^2 \frac{t^2}{\sqrt{8+t^3}}\,\mathrm{d}t$ $\quad I_6 = \int_e^{e^2} \frac{1}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t$ $\quad I_7 = \int_1^e \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ $\quad I_8 = \int_{-1}^1 e^{-2x+1}\,\mathrm{d}x$ $\quad I_9 = \int_0^2 \frac{x^2}{2+x^3}\,\mathrm{d}x$

Exercice 2 (Intégration par parties)

Calculer : $\quad I = \int_0^1 \frac{x}{e^{2x}}\,\mathrm{d}x$ $\quad J = \int_1^2 x\ln(x)\,\mathrm{d}x$ $\quad K = \int_{-1}^0 (x^2-2x+4)e^{-x}\,\mathrm{d}x$

Exercice 3 (Changement de variables)

Calculer grâce au changement de variable indiqué, les intégrales suivantes (proposer aussi une primitive "à vue" si vous en trouvez une) :

1. $\int_1^5 \sqrt{2x-1}\,\mathrm{d}x$ avec $u = \sqrt{2x-1}$
2. $\int_0^4 \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}$ avec $u = 1+\sqrt{x}$
3. $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x\big(1+\ln(x)\big)}$ avec $u = 1+\ln(x)$

Exercice 4

Montrer que : $\quad \int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$

2. Intégrales généralisées

Exercice 5 (Nature d'intégrales impropres)

Déterminer la nature des intégrales suivantes :

1. $\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t-1}}\,\mathrm{d}t$
2. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$
3. $\int_0^{+\infty} \frac{e^t}{t+e^{2t}}\,\mathrm{d}t$
4. $\int_0^{+\infty} t^3 e^{-t}\,\mathrm{d}t$
5. $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t\ln^2(t)}\,\mathrm{d}t$
6. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$

Exercice 6

Prouver la convergence, et le cas échéant calculer la valeur de chacune des intégrales suivantes :

1. $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$
2. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(2x+3)^2}\,\mathrm{d}x$
3. $\int_0^{+\infty} te^{-t^2}\,\mathrm{d}t$
4. $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-2x}\,\mathrm{d}x$
5. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ (utiliser une IPP)
6. $\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ (utiliser une IPP)

Exercice 7

1. Montrer que $\forall t \geq 1,\ \frac{1}{t(t+1)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}$
2. En déduire $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(t+1)}$

Exercice 8

On désigne par n un entier naturel.

1. **a.** Justifier que l'on a $\frac{(\ln t)^n}{t^3} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$
   b. En déduire la convergence de $I_n = \int_1^{+\infty} \frac{(\ln t)^n}{t^3}\,\mathrm{d}t$
2. **a.** Calculer I_0.
   b. Grâce à une IPP, donner une relation entre I_{n+1} et I_n.
   c. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \frac{n!}{2^{n+1}}$

Exercice 9

On note $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^4)^n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Étudier la convergence de l'intégrale I_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Justifier que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n - I_{n+1} = \frac{1}{4n} I_n$.
4. En déduire une expression de I_n en fonction de n et I_1.

Exercice 10

On considère $I_p = \int_0^{+\infty} x^p e^{-x}\,\mathrm{d}x$ et $J_p = \int_0^{+\infty} \frac{x^p}{e^x - 1}\,\mathrm{d}x$, $p \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que I_p est une intégrale convergente pour tout $p \in \mathbb{N}$.
2. Exprimer I_{p+1} en fonction de I_p.
3. En déduire une expression de I_p en fonction de p.
4. Montrer que J_p existe pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.